Álvaro Andrini

PRATICANDO MATEMÁTICA

MESTRE

8ª série

EDITORA DO BRASIL S/A

ISBN 85-10-01259-8
ISBN 85-10-01260-1 (Livro do professor)

Registre aqui a história deste livro:

Nome da Escola

Nome do aluno	Ano
Nome do aluno	Ano
Nome do aluno	Ano

ÁLVARO ANDRINI

Praticando Matemática

Prof. Zé Luiz

8ª Série

- *As respostas constam apenas no livro do professor.*
- *O planejamento de curso encontra-se num suplemento especial, no final do livro.*

EDITORA DO BRASIL S/A

Rua Conselheiro Nébias, 887
São Paulo

Dados de Catalogação na Publicação (CIP) Internacional
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Andrini, Álvaro.
Praticando matemática : 8ª série / Álvaro Andrini. -- São Paulo : Editora do Brasil, 1989.

Suplementado por livro do mestre.

1. Matemática (1º grau) I. Título.

89-0744 CDD-372.7

Índices para catálogo sistemático:
1. Matemática : Ensino de 1º grau 372.7

Nossa capa

O retilíneo das linhas, os ângulos e a regularidade das faces, representativas do tesouro que a natureza nos oferece, simbolizam a grandiosidade dos princípios da Matemática.

Reprodução: *Gemas do Brasil*
Gentileza: *H B Consultores Associados S/C Ltda.*

APRESENTAÇÃO

Os quatro volumes desta coleção, destinada às quatro últimas séries do 1º grau, foram enriquecidos a partir da experiência em sala de aula e de algumas sugestões de colegas.

As características básicas da obra são as seguintes:

- *Cada capítulo está assim esquematizado:*
  - *desenvolvimento da teoria;*
  - *exercícios resolvidos;*
  - *exercícios propostos;*
  - *exercícios complementares;*
  - *testes.*

- *A* teoria *é exposta numa* linguagem clara e sucinta, *de acordo com o nível a que se destina, sem, no entanto, abandonar o rigor necessário ao tratamento da matéria.*

- *Os* exercícios resolvidos *servem de apoio aos conceitos teóricos.*

- *Os* exercícios resolvidos *e os* exercícios propostos *apresentam uma seqüência crescente de dificuldade.*

- *Os* exercícios complementares *podem ser utilizados como reforço e/ou revisão da matéria.*

- *Constituem* inovações da obra:
  - capítulos curtos: *os capítulos longos da edição anterior foram eliminados pela divisão do assunto, para proporcionar inter-relação e revisão mais constantes;*
  - séries de exercícios totalmente refeitas, *apresentando os mais diferentes tipos de questões;*
  - exercícios resolvidos intercalados nos exercícios propostos, *para que o aluno tenha neles um suporte ao refletir sobre dificuldades encontradas;*
  - *inclusão de* testes de vestibulares *adequados ao tratamento dado à matéria nesta coleção.*

Agradecemos, antecipadamente, todas as críticas e sugestões que nos forem enviadas.

O Autor

ÍNDICE

POTENCIAÇÃO

DEFINIÇÃO

Potência é um produto de fatores iguais.

$$a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \quad \text{(n fatores)}$$

O número real **a** é chamado base da potência e o número natural **n** é chamado expoente da potência.

Exemplos:

a) $2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$

b) $(-7)^2 = (-7) \cdot (-7) = 49$

c) $(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$

d) $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

CASOS PARTICULARES

1. Toda potência de expoente 1 é igual à base.

$$a^1 = a$$

Exemplo: $(-3)^1 = -3$

2. Toda potência de expoente zero é igual a 1.

$$a^0 = 1$$

Exemplo: $(-5)^0 = 1$

3. Toda potência de expoente negativo é igual ao inverso da potência de expoente positivo.

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (a \neq 0 \text{ e n inteiro})$$

Exemplo: $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

EXERCÍCIOS

1) Calcule:

a) 7^2 49
b) 4^3 64
c) 2^5 32
d) 8^1 8
e) 9^0 1

f) $(-9)^2$ 81
g) $(-5)^3$ −125
h) $(-1)^7$ −1
i) $(-15)^1$ −15
j) $(-10)^0$ 1

l) $(+3)^4$ 81
m) $(-1)^{56}$ 1
n) $(-10)^5$ −100000
o) $(-0{,}1)^2$ 0,01
p) π^0 1

2) Calcule:

Resolvido. $-3^4 = -(3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) = -81$

a) 2^5 32
b) $(-2)^5$ −32
c) -2^5 −32

d) 2^4 16
e) $(-2)^4$ 16
f) -2^4 −16

g) $-(-3)^4$ −81
h) $-(-5)^3$ 125
i) $-(+2)^6$ −64

3) Calcule:

a) $\left(\frac{3}{4}\right)^2$ $\frac{9}{16}$
b) $\left(-\frac{1}{2}\right)^4$ $\frac{1}{16}$
c) $\left(-\frac{1}{3}\right)^3$ $-\frac{1}{27}$

d) $\left(-\frac{4}{5}\right)^0$ 1
e) $\left(-\frac{5}{9}\right)^1$ $-\frac{5}{9}$
f) $\left(+\frac{7}{8}\right)^1$ $\frac{7}{8}$

g) $\left(-\frac{1}{2}\right)^5$ $-\frac{1}{32}$
h) $\left(-\frac{4}{3}\right)^2$ $\frac{16}{9}$
i) $\left(1\frac{1}{2}\right)^2$ $\frac{9}{4}$

4) Calcule:

Resolvido. $-(-5)^{-2} = -\frac{1}{(-5)^2} = -\frac{1}{25}$

a) 7^{-2} $\frac{1}{49}$
b) 5^{-3} $\frac{1}{125}$

c) 2^{-4} $\frac{1}{16}$
d) 2^{-5} $\frac{1}{32}$

e) $(-3)^{-2}$ $\frac{1}{9}$
f) $-(-3)^{-2}$ $-\frac{1}{9}$

5) Calcule:

Resolvido. $\left(\frac{5}{2}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{5}{2}\right)^{2}} = \frac{1}{\frac{25}{4}} = 1 : \frac{25}{4} = \frac{4}{25}$

a) $\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}$ $\frac{4}{9}$

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$ 8

c) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$ $\frac{9}{4}$

d) $\left(-\frac{1}{4}\right)^{-2}$ 16

e) $\left(\frac{5}{2}\right)^{-3}$ $\frac{8}{125}$

f) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-4}$ 16

6) Calcule:

a) $(-4)^2 - 3$ 13
b) $1 + (-2)^3$ -7
c) $-2 + (-5)^2$ 23
d) $15 + (-1)^7 - 2$ 12
e) $(-2)^2 + (-3)^3 + 1$ -22
f) $(-9)^2 - 2 - (-3) - 6$ 76
g) $(-2) . (-7) + (-3)^2$ 23
h) $(-1)^3 + 3 + (-2) . (-5)$ 12

7) Calcule o valor das expressões:

a) $\left(-\frac{4}{3}\right)^2 - 1$ $\frac{7}{9}$

b) $\frac{3}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 8$ $-\frac{25}{4}$

c) $\left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$ 2

d) $\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(-1 + \frac{1}{2}\right)^3$ $\frac{1}{8}$

POTÊNCIAS COM MESMA BASE

Para facilitar as operações entre potências, empregam-se as seguintes propriedades:

Exemplos:

❶ $a^m . a^n = a^{m+n}$ — • $2^3 . 2^8 = 2^{3+8} = 2^{11}$

❷ $a^m : a^n = a^{m-n}$ — • $3^{10} : 3^2 = 3^{10-2} = 3^8$

❸ $(a^m)^n = a^{m.n}$ — • $(7^3)^4 = 7^{3 \cdot 4} = 7^{12}$

❹ $(a . b)^m = a^m . b^m$ — • $(5 . 3)^2 = 5^2 . 3^2$

EXERCÍCIOS

1) Classifique como verdadeiro ou falso:

a) $5^7 . 5^2 = 5^9$ *(V)*

b) $3^9 : 3^4 = 3^5$ *(V)*

c) $8^5 : 8^{-3} = 8^2$ *(F)*

d) $7^5 - 7^3 = 7^2$ *(F)*

e) $7^{x-5} = \frac{7^x}{7^5}$ *(V)*

f) $(7^3)^2 = 7^5$ *(F)*

g) $(5 + 2)^2 = 5^2 + 2^2$ *(F)*

h) $3^2 + 3^3 + 3^5 = 3^{10}$ *(F)*

i) $2^{x+1} = 2^x . 2^1$ *(V)*

j) $\frac{10^3}{10^5} = 10^{-2}$ *(V)*

2) Simplifique, aplicando as propriedades de potências:

a) $(3 . 7)^5 . (3 . 7)^2$ *$3^7 . 7^7$*

b) $(5xy^2) . (2x^2y^3)$ *$10x^3y^5$*

c) $(a^2 . b)^2 . (a . b)^3$ *$a^7 . b^5$*

d) $(7xy^2)^2 . (x^3y^2)^4$ *$49x^{14}y^{12}$*

3) Simplifique, aplicando as propriedades de potências:

a) $\dfrac{(10^2)^3}{(10^3)^2}$

b) $\dfrac{2^8 . 5^{10}}{2^5 . 5^6}$ $2^3 . 5^4$

4) Expressar $\dfrac{(2^4)^2 . 8}{2^6}$ como uma potência de 2. (2^5)

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1) Calcule:

a) $(-3)^2 + 6^2$ 45

b) $3^2 + (-5)^2$ 34

c) $(-2)^3 - (-1)^3$ −7

d) $5^2 - 3^4 - (-1)^9$ −55

e) $(-10)^2 - (-3)$ 103

f) $5 . (-3)^2 + 1 - 6^0$ 45

g) $4 . (-1) . (-3)^2$ −36

h) $-4 . 6 . (-1)^7$ 24

i) $(-7)^2 - 4 . 2 . (-2)$ 65

j) $(-6)^2 - 4 . (-3) . (-3)$ 0

l) $2 + 2^{-1} + 2^{-2}$ $\frac{11}{4}$

m) $3^0 - 3^{-1} + 3^2$ $\frac{29}{3}$

2) Calcule:

a) $2^{-2} + \left(\dfrac{1}{3}\right)^2$ $\frac{13}{36}$

b) $5^0 - (-1) - \left(-\dfrac{1}{2}\right)^2$ $\frac{7}{4}$

c) $7^{-2} + \dfrac{35}{49}$ $\frac{36}{49}$

d) $\dfrac{1}{2} - (-1)^4 - (-1)^3$ $\frac{1}{2}$

3) Expressar $\dfrac{(5^2)^4 . 625}{5^7}$ como uma potência de 5. (5^5)

TESTES

1) Se $a = -2$ e $c = 5$, então a^c é igual a:

a) 10
b) -10
c) 32
■ d) -32

2) (PUC-SP) O número de elementos distintos da seqüência:

$2^4, 4^2, 4^{-2}, (-4)^2, (-2)^4, (-2)^{-4}$ é:

a) 1
■ b) 2
c) 3
d) 4

$16, 16, \frac{1}{16}, 16, 16, \frac{1}{16}$

3) (FEI-SP) O valor da expressão $(-2) + (-3) \times (-2)^{-1} : (-3)$ é:

a) 1
b) $-\frac{5}{6}$
c) $-\frac{5}{3}$
■ d) $-\frac{5}{2}$

$(-2) + (-3) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) : (-3) =$
$= (-2) + \left(+\frac{3}{2}\right) : (-3) =$
$= -2 - \frac{1}{2} = -\frac{5}{2}$

4) (F. OBJETIVO-SP) O valor da expressão numérica

$-4^2 + (3-5) \cdot (-2)^3 + 3^2 - (-2)^4$ é:

a) 7
b) 8
■ c) -7
d) 15

5) Se $m = 10^5 \cdot 10^2 \cdot 1000$, então:

■ a) $m = 10^{10}$
b) $m = 10^{11}$
c) $m = 10^9$
d) $m = 10^8$

6) (FEI-SP) O valor da expressão $5 \cdot 10^8 \cdot 4 \cdot 10^{-3}$ é:

a) 20^6
■ b) $2 \cdot 10^6$
c) $2 \cdot 10^9$
d) $20 \cdot 10^{-4}$

$20 \cdot 10^8 \cdot 10^{-3} =$
$= 2 \cdot 10^6$

7) (PUC-SP) O valor da expressão $\dfrac{10^{-3} \times 10^{5}}{10 \times 10^{4}}$ é:

a) 10

b) 1000

c) 10^{-2}

■ d) 10^{-3}

$\dfrac{10^2}{10^5} = 10^{-3}$

8) (PUC-SP) O produto $a^m \cdot a^m$ é igual a:

a) a

b) a^{m-n}

■ c) a^{2m}

d) a^{m^2}

9) O valor da expressão $\dfrac{2^0 - (-2)^2}{2^2 + (-2)^3}$ é:

■ a) $\dfrac{3}{4}$

b) $\dfrac{4}{3}$

c) $-\dfrac{5}{2}$

d) $-\dfrac{2}{5}$

10) (SANTA CASA-SP) O valor de $\dfrac{3^{-1} + 5^{-1}}{2^{-1}}$ é:

a) $\dfrac{1}{2}$

b) $\dfrac{1}{8}$

c) $\dfrac{4}{15}$

■ d) $\dfrac{16}{15}$

$\dfrac{\frac{1}{3} + \frac{1}{5}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{16}{15}$

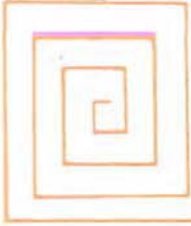
11) (GV-SP) A expressão $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-3} + \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-5}$ é igual a:

a) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-8}$

■ b) 40

c) $\dfrac{1}{40}$

d) -40

$\dfrac{1}{\frac{1}{8}} + \dfrac{1}{\frac{1}{32}} =$
$= 8 + 32 = 40$

RADICAIS

RADICIAÇÃO

Sabemos que:

a) $\sqrt{25} = 5$ porque $5^2 = 25$
b) $\sqrt[3]{8} = 2$ porque $2^3 = 8$
c) $\sqrt[4]{16} = 2$ porque $2^4 = 16$

Sendo **a** e **b** números reais positivos e **n** um número inteiro maior que 1, temos por definição que:

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$$

Lembremos que os elementos de $\sqrt[n]{a} = b$ são assim denominados:

$\sqrt{\ }$ ⟶ sinal do radical
n ⟶ índice do radical
a ⟶ radicando
b ⟶ raiz

Nota:

Quando o índice é 2, usualmente não se escreve.

Exemplos:

a) $\sqrt[2]{9} = \sqrt{9}$

b) $\sqrt[2]{15} = \sqrt{15}$

RAIZ DE UM NÚMERO REAL

Consideremos o radical $\sqrt[n]{a}$ e verifiquemos os casos seguintes:

a) **ÍNDICE PAR**

Se **n** é par, todo número real positivo tem duas raízes.
Veja:

$$\left.\begin{array}{l}(-7)^2 = 49 \\ (+7)^2 = 49\end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt{49} = \pm 7$$

Como o resultado de uma operação deve ser único, vamos convencionar que:

$$\sqrt{49} = 7$$
$$-\sqrt{49} = -7$$

Exemplos:

a) $\sqrt{25} = 5$

b) $-\sqrt{25} = -5$

c) $\sqrt[4]{16} = 2$

d) $-\sqrt[4]{16} = -2$

Nota:

Não existe raiz real de um número negativo se o índice do radical for par.
Veja:

a) $\sqrt{-9}$ = **nenhum real** porque (**nenhum real**)$^2 = -9$

b) $\sqrt[4]{-16}$ = **nenhum real** porque (**nenhum real**)$^2 = -16$

b) **ÍNDICE ÍMPAR**

Se **n** é ímpar, cada número real tem apenas uma única raiz.

Exemplos:

a) $\sqrt[3]{8} = 2$ porque $2^3 = 8$

b) $\sqrt[3]{-8} = -2$ porque $(-2)^3 = -8$

c) $\sqrt[5]{1} = 1$ porque $1^5 = 1$

d) $\sqrt[5]{-1} = -1$ porque $(-1)^5 = -1$

Resumo:

Radicando positivo ⇒ raiz positiva
Radicando negativo e índice ímpar ⇒ raiz negativa

EXERCÍCIOS

1) Copie e complete o quadro:

radical	$\sqrt{7}$	$\sqrt[3]{2}$	$\sqrt[4]{5}$	$\sqrt[5]{1}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt[3]{9}$
índice	2	3	4	5	2	3
radicando	7	2	5	1	5	9

2) Determine as raízes:

a) $\sqrt{49}$ 7
b) $\sqrt{100}$ 10
c) $\sqrt{0}$ 0
d) $\sqrt[3]{8}$ 2
e) $\sqrt[3]{-8}$ −2
f) $\sqrt[3]{125}$ 5
g) $\sqrt[3]{-1}$ −1
h) $\sqrt[4]{1}$ 1
i) $\sqrt[4]{16}$ 2
j) $\sqrt[3]{-1000}$ −10
l) $\sqrt[4]{81}$ 3
m) $\sqrt[5]{0}$ 0
n) $\sqrt[5]{-32}$ −2
o) $\sqrt[6]{64}$ 2
p) $\sqrt[7]{-1}$ −1

3) Calcule, caso exista em $\mathbb{R}$:

a) $\sqrt{25}$ 5
b) $-\sqrt{25}$ −5
c) $\sqrt{-25}$
d) $-\sqrt{-25}$
e) $\sqrt[4]{81}$ 3
f) $\sqrt[4]{-81}$
g) $-\sqrt[4]{81}$ −3
h) $\sqrt[6]{1}$ 1
i) $-\sqrt[6]{1}$ −1
j) $\sqrt[6]{-1}$
l) $-\sqrt[3]{-1}$ 1
m) $-\sqrt[3]{-8}$ 2

4) Calcule:

a) $7-\sqrt{25}$ 2
b) $\sqrt[5]{0}+\sqrt[6]{1}$ 1
c) $\sqrt[3]{0}+\sqrt[3]{-125}$ −5
d) $\sqrt[4]{81}+\sqrt[5]{1}$ 4
e) $4+\sqrt[3]{-1}$ 3
f) $5-\sqrt[3]{-8}$ 7
g) $7\sqrt[3]{-1}-5$ −12
h) $2\sqrt{49}-3\sqrt{1}$ 11

5) Calcule:

a) $\sqrt{64+36}$ 10
b) $\sqrt{100-36}$ 8
c) $\sqrt{3^2+4^2}$ 5
d) $\sqrt{10^2-8^2}$ 6

6) Calcule:

a) $\frac{7 + \sqrt{25}}{4}$ 3

b) $\frac{7 - \sqrt{25}}{4}$ $\frac{1}{2}$

c) $\frac{-6 + \sqrt{100}}{2}$ 2

d) $\frac{-6 - \sqrt{100}}{2}$ -8

7) Calcule:

a) $\frac{\sqrt{36} + 2\sqrt{9}}{3}$ 4

b) $\frac{\sqrt{25 - 16}}{\sqrt{25} - \sqrt{16}}$ 3

POTÊNCIA COM EXPOENTE FRACIONÁRIO

Se **a** é um número real positivo e $\frac{m}{n}$ é um número racional, com **m** e **n** inteiros e **n** > 0, definimos:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Exemplos:

a) $5^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{5^3}$

b) $7^{\frac{1}{2}} = \sqrt{7}$

Ilustrando: $\sqrt[3]{a^5} = a^{\frac{5}{3}}$ → expoente do radicando → índice da raiz

EXERCÍCIOS

1) Escreva em forma de potência com expoente fracionário:

a) $\sqrt[3]{7^2}$ $7^{\frac{2}{3}}$

b) $\sqrt[5]{a^3}$ $a^{\frac{3}{5}}$

c) $\sqrt{10}$ $10^{\frac{1}{2}}$

d) $\sqrt[4]{a^3}$ $a^{\frac{3}{4}}$

e) $\sqrt{x^5}$ $x^{\frac{5}{2}}$

f) $\sqrt[3]{m}$ $m^{\frac{1}{3}}$

2) Escreva em forma de radical:

a) $5^{\frac{3}{4}}$ $\sqrt[4]{5^3}$

b) $5^{\frac{1}{2}}$ $\sqrt{5}$

c) $a^{\frac{2}{5}}$ $\sqrt[5]{a^2}$

d) $a^{\frac{1}{3}}$ $\sqrt[3]{a}$

e) $2^{\frac{6}{7}}$ $\sqrt[7]{2^6}$

f) $6^{\frac{1}{2}}$ $\sqrt{6}$

PROPRIEDADES DOS RADICAIS

Para os radicais de **radicandos positivos** valem as seguintes propriedades:

1ª Propriedade:

Observe:

❶ $\sqrt{49} = \sqrt{7^2} = 7$

❷ $\sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{5^3} = 5$

Então:

$$\sqrt[n]{a^n} = a$$

Exemplos:

a) $\sqrt{3^2} = 3$

b) $\sqrt[3]{5^3} = 5$

c) $\sqrt[4]{10^4} = 10$

d) $\sqrt[3]{(5x)^3} = 5x$

2ª Propriedade:

Observe:

❶ $\sqrt{4 \cdot 25} = \sqrt{100} = 10$

❷ $\sqrt{4} \cdot \sqrt{25} = 2 \cdot 5 = 10$

Comparando ❶ e ❷, temos $\sqrt{4 \cdot 25} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{25}$

Então:

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

radical de um produto → $\sqrt[n]{a \cdot b}$

produto de radicais → $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

Exemplos:

a) $\sqrt{2 \cdot 7} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{7}$

b) $\sqrt{8 \cdot x} = \sqrt{8} \cdot \sqrt{x}$

c) $\sqrt[3]{5 \cdot a} = \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{a}$

d) $\sqrt[4]{5 \cdot 7 \cdot 9} = \sqrt[4]{5} \cdot \sqrt[4]{7} \cdot \sqrt[4]{9}$

EXERCÍCIOS

1) Aplique a 1ª propriedade:

a) $\sqrt{8^2}$ 8
b) $\sqrt[3]{7^3}$ 7
c) $\sqrt[5]{x^5}$ x
d) $\sqrt{(7a)^2}$ 7a
e) $\sqrt[3]{(5x)^3}$ 5x
f) $\sqrt[4]{(7x)^4}$ 7x
g) $\sqrt{(a^2m)^2}$ a^2m
h) $\sqrt{(a+3)^2}$ $a+3$
i) $\sqrt[3]{(7a^2)^3}$ $7a^2$

2) Aplique a 2ª propriedade:

a) $\sqrt{5 \cdot 7}$ $\sqrt{5} \cdot \sqrt{7}$
b) $\sqrt[3]{2 \cdot 8}$ $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{8}$
c) $\sqrt[3]{5x}$ $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{x}$
d) $\sqrt{10xy}$ $\sqrt{10} \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{y}$
e) $\sqrt{5x^2m}$ $\sqrt{5} \cdot \sqrt{x^2} \cdot \sqrt{m}$
f) $\sqrt[4]{9 \cdot x^3 \cdot y^5}$ $\sqrt[4]{9} \cdot \sqrt[4]{x^3} \cdot \sqrt[4]{y^5}$

3) Calcule, aplicando a 1ª e a 2ª propriedades:

a) $\sqrt[3]{2^3 \cdot 7^3}$ 14
b) $\sqrt[5]{2^5 \cdot x^5 \cdot y^5}$ 2xy

3ª Propriedade:

Observe:

❶ $\sqrt{\dfrac{4}{25}} = \dfrac{2}{5}$

❷ $\dfrac{\sqrt{4}}{\sqrt{25}} = \dfrac{2}{5}$

Comparando ❶ e ❷, temos: $\sqrt{\dfrac{4}{25}} = \dfrac{\sqrt{4}}{\sqrt{25}}$

Então:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

radical de um quociente → quociente de radicais

Exemplos:

a) $\sqrt{\dfrac{2}{5}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$

b) $\sqrt[3]{\dfrac{7}{2}} = \dfrac{\sqrt[3]{7}}{\sqrt[3]{2}}$

SIMPLIFICAÇÃO DE RADICAIS

Simplificar um radical significa escrevê-lo sob a forma mais simples e equivalente ao radical dado.

Destacamos os seguintes casos de simplificação:

1º Caso: *O índice e o expoente do radicando são divisíveis por um mesmo número (diferente de zero).*

Observe:

❶ $\sqrt[15]{8^{15}} = 8$

❷ $\sqrt[5]{8^5} = 8$

Comparando ❶ e ❷, temos: $\sqrt[15]{8^{15}} = \sqrt[5]{8^5}$

Conclusão:

> Um radical não se altera quando o expoente do radicando e o índice do radical são divididos pelo mesmo número.

Exemplos:

a) $\sqrt[12]{3^{10}} = \sqrt[12:2]{3^{10:2}} = \sqrt[6]{3^5}$

b) $\sqrt[9]{7^{12}} = \sqrt[9:3]{7^{12:3}} = \sqrt[3]{7^4}$

EXERCÍCIOS

Simplifique os radicais:

a) $\sqrt[4]{5^6}$ $\sqrt{5^3}$

b) $\sqrt[8]{7^6}$ $\sqrt[4]{7^3}$

c) $\sqrt[6]{3^9}$ $\sqrt{3^3}$

d) $\sqrt[10]{8^{12}}$ $\sqrt[5]{8^6}$

e) $\sqrt[12]{5^9}$ $\sqrt[4]{5^3}$

f) $\sqrt[6]{x^{10}}$ $\sqrt[3]{x^5}$

g) $\sqrt[10]{a^6}$ $\sqrt[5]{a^3}$

h) $\sqrt[15]{m^{10}}$ $\sqrt[3]{m^2}$

i) $\sqrt[10]{x^5}$ $\sqrt{x}$

j) $\sqrt[8]{a^4}$ $\sqrt{a}$

2º Caso: *O expoente do radicando é um múltiplo do índice.*

O radicando pode ser colocado fora do radical com um expoente igual ao quociente do expoente anterior pelo índice.

Exemplos:

a) $\sqrt{7^{10}} = 7^5$ (Dividimos 10 por 2)
b) $\sqrt[3]{7^{12}} = 7^4$ (Dividimos 12 por 3)
c) $\sqrt[4]{7^{20}} = 7^5$ (Dividimos 20 por 4)
d) $\sqrt{a^6} = a^3$ (Dividimos 6 por 2)
e) $\sqrt{x^{10}} = x^5$ (Dividimos 10 por 2)

EXERCÍCIOS

Simplifique os radicais:

a) $\sqrt{7^8}$ 7^4
b) $\sqrt[3]{5^9}$ 5^3
c) $\sqrt[4]{7^{12}}$ 7^3
d) $\sqrt[5]{9^{15}}$ 9^3
e) $\sqrt[3]{3^{15}}$ 3^5

f) $\sqrt[4]{6^8}$ 6^2
g) $\sqrt{9^{20}}$ 9^{10}
h) $\sqrt{x^2}$ x
i) $\sqrt{x^4}$ x^2
j) $\sqrt{a^6}$ a^3

l) $\sqrt[3]{a^{15}}$ a^5
m) $\sqrt[4]{a^8}$ a^2
n) $\sqrt{a^4x^2}$ a^2x
o) $\sqrt{a^6x^6}$ a^3x^3
p) $\sqrt{a^8x^4}$ a^4x^2

3º Caso: *O expoente do radicando é maior do que o índice.*

Decompomos o radicando em fatores de modo que um dos fatores tenha expoente múltiplo do índice.

Exemplos:

a) $\sqrt{x^{11}} = \sqrt{x^{10} . x} = x^5 \sqrt{x}$

b) $\sqrt[4]{a^7} = \sqrt[4]{a^4 . a^3} = a \sqrt[4]{a^3}$

c) $\sqrt[3]{m^5} = \sqrt[3]{m^3 . m^2} = m \sqrt[3]{m^2}$

EXERCÍCIOS

1) Simplifique os radicais:

a) $\sqrt{a^7}$ $a^3\sqrt{a}$

b) $\sqrt[3]{m^7}$ $m^2\sqrt[3]{m}$

c) $\sqrt[4]{m^7}$ $m\sqrt[4]{m^3}$

d) $\sqrt[5]{x^6}$ $x\sqrt[5]{x}$

e) $\sqrt[7]{a^9}$ $a\sqrt[7]{a^2}$

f) $\sqrt{7^5}$ $7^2\sqrt{7}$ ou $49\sqrt{7}$

g) $\sqrt{2^9}$ $2^4\sqrt{2}$ ou $16\sqrt{2}$

h) $\sqrt[3]{5^{10}}$ $5^3\sqrt[3]{5}$ ou $125\sqrt[3]{5}$

i) $\sqrt[4]{7^9}$ $7^2\sqrt[4]{7}$ ou $49\sqrt[4]{7}$

j) $\sqrt[5]{6^8}$ $6\sqrt[5]{6^3}$ ou $6\sqrt[5]{216}$

2) Simplifique os radicais:

Resolvido. $\sqrt[3]{x^3 . a^5} = \sqrt[3]{x^3 . a^3 . a^2} = x . a\sqrt[3]{a^2}$

a) $\sqrt{a^2 . m^3}$ $am\sqrt{m}$

b) $\sqrt{a^4 . x^5}$ $a^2x^2\sqrt{x}$

c) $\sqrt{a^2 . m^7}$ $am^3\sqrt{m}$

d) $\sqrt[3]{a^6 . m^7}$ $a^2m^2\sqrt[3]{m}$

3) Fatore o radicando e simplifique os radicais:

Resolvido. $\sqrt{32} = \sqrt{2^5} = \sqrt{2^4 . 2} = 2^2 . \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

a) $\sqrt{8}$ $2\sqrt{2}$

b) $\sqrt{27}$ $3\sqrt{3}$

c) $\sqrt[3]{81}$ $3\sqrt[3]{3}$

d) $\sqrt[4]{32}$ $2\sqrt[4]{2}$

e) $\sqrt{50}$ $5\sqrt{2}$

f) $\sqrt{80}$ $4\sqrt{5}$

4) Simplifique os radicais:

Resolvido. $\sqrt{25x^3} = \sqrt{5^2 . x^2 . x} = 5x\sqrt{x}$

a) $\sqrt{49m^3}$ $7m\sqrt{m}$

b) $\sqrt{9x^5}$ $3x^2\sqrt{x}$

c) $\sqrt[3]{8a^4}$ $2a\sqrt[3]{a}$

d) $\sqrt[4]{16m^5}$ $2m\sqrt[4]{m}$

e) $\sqrt[3]{27a^8}$ $3a^2\sqrt[3]{a^2}$

f) $\sqrt[3]{8m^{10}}$ $2m^3\sqrt[3]{m}$

g) $\sqrt{4a^5}$ $2a^2\sqrt{a}$

h) $\sqrt{25a^4x}$ $5a^2\sqrt{x}$

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1) Qual o valor de x?

a) $\sqrt{x} = 4$ 16

b) $\sqrt{x} = 7$ 49

c) $\sqrt{x} = 13$ 169

d) $\sqrt{x} = 20$ 400

e) $\sqrt[3]{x} = 5$ 125

f) $\sqrt[4]{x} = 3$ 81

g) $\sqrt[3]{x} = -2$ −8

h) $\sqrt[5]{x} = -1$ −1

2) Calcule:

a) $\sqrt{36} - \sqrt{49}$ −1

b) $\sqrt[3]{8} + \sqrt{64}$ 10

c) $-\sqrt{100} - \sqrt[3]{64}$ −14

d) $-\sqrt[3]{125} - \sqrt[3]{-1}$ −4

e) $\sqrt[5]{1} + \sqrt{9} - \sqrt[3]{8}$ 2

f) $\sqrt{100} + \sqrt[5]{-32} + \sqrt[6]{0}$ 8

g) $\sqrt[4]{16} + \sqrt[7]{1} - \sqrt[5]{-1}$ 4

h) $2\sqrt{49} - 3\sqrt[5]{1} + \sqrt[5]{0}$ 11

3) Determine as raízes:

a) $\sqrt{\frac{49}{25}}$ $\frac{7}{5}$

b) $-\sqrt{\frac{121}{100}}$ $-\frac{11}{10}$

c) $\sqrt[3]{-\frac{1}{8}}$ $-\frac{1}{2}$

d) $\sqrt[3]{\frac{27}{1000}}$ $\frac{3}{10}$

e) $\sqrt[4]{\frac{16}{81}}$ $\frac{2}{3}$

f) $\sqrt[5]{\frac{32}{243}}$ $\frac{2}{3}$

4) (CESCEM-SP) Qual o valor da expressão $\dfrac{\frac{1}{2} + 5{,}5}{\sqrt{9}}$? Resp.: 2

5) (ITE-Bauru) Qual é o valor da expressão $64^{\frac{3}{2}}$?

$\sqrt{64^3} = \sqrt{(2^6)^3} = \sqrt{2^{18}} = 2^9 = 512$ Resp.: 512

6) Simplifique os radicais:

Resolvido. $\sqrt{32} = \sqrt{16 \cdot 2} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

a) $\sqrt{12}$ $2\sqrt{3}$

b) $\sqrt{18}$ $3\sqrt{2}$

c) $\sqrt{50}$ $5\sqrt{2}$

d) $\sqrt{8}$ $2\sqrt{2}$

e) $\sqrt{72}$ $6\sqrt{2}$

f) $\sqrt{75}$ $5\sqrt{3}$

g) $\sqrt{98}$ $7\sqrt{2}$

h) $\sqrt{99}$ $3\sqrt{11}$

i) $\sqrt{200}$ $10\sqrt{2}$

7) Simplifique os radicais (as variáveis são positivas):

a) $\sqrt{25x^2}$ $5x$

b) $\sqrt{81x^4}$ $9x^2$

c) $\sqrt{(a+b)^2}$ $a+b$

d) $\sqrt{9x^2y^2}$ $3xy$

e) $\sqrt{81x^4y^2}$ $9x^2y$

f) $\sqrt[3]{27x^6}$ $3x^2$

g) $\sqrt[3]{8m^4}$ $2m\sqrt[3]{m}$

h) $\sqrt{49a^4x}$ $7a^2\sqrt{x}$

TESTES

1) O valor da expressão $\sqrt[5]{1} + \sqrt[4]{81} - \sqrt[3]{125}$ é:

a) 0

b) 1

■ c) − 1

d) − 2

2) O valor da expressão $\dfrac{-(-2)^2 - \sqrt[3]{-27}}{5^0 - 2}$ é:

a) 7

■ b) 1

c) − 1

d) − 7

3) (F. OBJETIVO-SP) O valor da expressão numérica $\dfrac{\sqrt[3]{-1}+\sqrt[3]{8}+\sqrt{4}}{\sqrt{9+16}}$ é:

■ a) 0,6

b) $\dfrac{3}{7}$

c) 0,75

d) $\dfrac{1}{2}$

$\dfrac{-1+2+2}{5} = \dfrac{3}{5} = 0{,}6$

4) (UF-RN) $\sqrt{13+\sqrt{7+\sqrt{2+\sqrt{4}}}}$ é igual a:

■ a) 4
b) 5
c) 6
d) 7

$\sqrt{13+\sqrt{7+\sqrt{2+2}}} =$
$= \sqrt{13+\sqrt{7+2}} =$
$= \sqrt{13+3} = 4$

5) (UMC-SP) Seja $\sqrt{13^2-12^2} = \sqrt[n]{125}$. O valor de **n** é:

a) 1
b) 2
■ c) 3
d) 4

$\sqrt{169-144} = \sqrt[n]{5^3}$

$5 = \sqrt[n]{5^3}$

$n = 3$

6) Simplificando o radical $\sqrt[10]{1024}$, vamos obter:

■ a) 2
b) 3
c) 4
d) 6

7) (UE-MT) O número $\sqrt{2352}$ corresponde a:

a) $4\sqrt{7}$
b) $4\sqrt{21}$
■ c) $28\sqrt{3}$
d) $56\sqrt{3}$

$\sqrt{2352} = \sqrt{2^4 \,.\, 3 \,.\, 7^2} = 2^2 \,.\, 7\sqrt{3} = 28\sqrt{3}$

8) Simplificando $\sqrt[3]{\frac{32}{4}}$, obtemos:

a) $\frac{16}{2}$

■ b) 2 $\sqrt[3]{\frac{32}{4}} = \sqrt[3]{8} = 2$

c) $2\sqrt{2}$

d) $\sqrt{2}$

9) Simplificando a expressão $\sqrt{\frac{4}{9}} - \sqrt{\frac{16}{81}}$, obtemos:

a) $\frac{1}{9}$

■ b) $\frac{2}{9}$ $\frac{2}{3} - \frac{4}{9} = \frac{2}{9}$

c) 0

d) $\frac{2}{3}$

10) (PUC-SP) Simplificando $\sqrt{\frac{75}{12}}$, obtemos:

a) $\sqrt{\frac{5}{2}}$

b) $\frac{5}{3}$

c) $\sqrt{\frac{5}{3}}$

■ d) $\frac{5}{2}$

$\sqrt{\frac{75}{12}} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$

11) (PUC-DF) O valor numérico da expressão $2\sqrt{xy} - \sqrt{x^2 - 21y}$, para x = 12 e y = 3, é igual a:

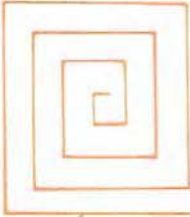
a) 0

b) −3

c) 9

■ d) 3

$2\sqrt{36} - \sqrt{144 - 63} =$

$= 2 \cdot 6 - 9 = 3$

3 OPERAÇÕES COM RADICAIS

RADICAIS SEMELHANTES

Radicais semelhantes são os que têm o mesmo índice e o mesmo radicando.

Exemplos de radicais semelhantes:

a) $7\sqrt{5}$ e $-2\sqrt{5}$

b) $5\sqrt[3]{2}$, $4\sqrt[3]{2}$ e $\sqrt[3]{2}$

Exemplos de radicais não-semelhantes:

a) $5\sqrt{8}$ e $2\sqrt{3}$ (Os radicandos são diferentes.)

b) $4\sqrt[3]{7}$ e $5\sqrt{7}$ (Os índices são diferentes.)

EXERCÍCIOS

Responda em quais itens os radicais são semelhantes:

■ a) $5\sqrt{2}$ e $3\sqrt{2}$

■ b) $2\sqrt[3]{7}$ e $-5\sqrt[3]{7}$

■ c) $4\sqrt{3}$ e $\sqrt{3}$

d) $\sqrt{5}$ e $2\sqrt[4]{5}$

e) $7\sqrt{2}$ e $7\sqrt{3}$

■ f) $3\sqrt{2}$ e $-6\sqrt{2}$

■ g) $4\sqrt{2}$, $-5\sqrt{2}$ e $\sqrt{2}$

h) $7\sqrt{5}$, $2\sqrt[3]{5}$ e $\sqrt{5}$

OPERAÇÕES COM RADICAIS

A) ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO

1º Caso. *Os radicais não são semelhantes.*

Devemos proceder do seguinte modo:

1º) Extrair as raízes (exatas ou aproximadas).

2º) Somar ou subtrair os resultados.

Exemplos:

❶ $\sqrt{16} + \sqrt{9} = 4 + 3 = 7$

❷ $\sqrt{49} - \sqrt{25} = 7 - 5 = 2$

❸ $\sqrt{2} + \sqrt{3} \cong 1{,}41 + 1{,}73 \cong 3{,}14$

Neste último exemplo, o resultado obtido é aproximado, pois $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$ são números irracionais (representação decimal infinita e não-periódica).

EXERCÍCIOS

1) Calcule:

a) $\sqrt{9} + \sqrt{4}$ *5*

b) $\sqrt{25} - \sqrt{16}$ *1*

c) $\sqrt{49} + \sqrt{16}$ *11*

d) $\sqrt{100} - \sqrt{36}$ *4*

e) $\sqrt{4} - \sqrt{1}$ *1*

f) $\sqrt{25} - \sqrt[3]{8}$ *3*

g) $\sqrt[3]{27} + \sqrt[4]{16}$ *5*

h) $\sqrt[3]{125} - \sqrt[3]{8}$ *3*

i) $\sqrt{25} - \sqrt{4} + \sqrt{16}$ *7*

j) $\sqrt{49} + \sqrt{25} - \sqrt[3]{64}$ *8*

2) Copie e coloque = ou ≠ de modo a obter sentenças verdadeiras:

a) $\sqrt{2} + \sqrt{5} \ldots \sqrt{7}$ *≠*

b) $\sqrt{9} + \sqrt{4} \ldots \sqrt{13}$ *≠*

c) $\sqrt{9} + \sqrt{4} \ldots 5$ *=*

d) $\sqrt{16} - \sqrt{9} \ldots \sqrt{7}$ *≠*

3) A sentença matemática $\sqrt{16} + \sqrt{9} = \sqrt{25}$ é verdadeira ou falsa? Por quê?
$\sqrt{16} + \sqrt{9} = 4 + 3 = 7$ Resp.: Falsa, porque $7 \neq \sqrt{25}$

4) A sentença matemática $\sqrt{9} - \sqrt{4} = \sqrt{5}$ é verdadeira ou falsa? Por quê?
$\sqrt{9} - \sqrt{4} = 3 - 2 = 1$ Resp.: Falsa, porque $1 \neq \sqrt{5}$

2º Caso: *Os radicais são semelhantes.*

Para adicionar ou subtrair radicais semelhantes, procedemos como na redução de termos semelhantes de uma soma algébrica.

Exemplos:

a) $5\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = (5 + 3)\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$

b) $6\sqrt[3]{5} - 2\sqrt[3]{5} = (6 - 2)\sqrt[3]{5} = 4\sqrt[3]{5}$

c) $2\sqrt{7} - 6\sqrt{7} + \sqrt{7} = (2 - 6 + 1)\sqrt{7} = -3\sqrt{7}$

EXERCÍCIOS

1) Efetue as adições e subtrações:

a) $2\sqrt{7} + 3\sqrt{7}$ $5\sqrt{7}$

b) $5\sqrt{11} - 2\sqrt{11}$ $3\sqrt{11}$

c) $8\sqrt{3} - 10\sqrt{3}$ $-2\sqrt{3}$

d) $\sqrt[4]{5} + 2\sqrt[4]{5}$ $3\sqrt[4]{5}$

e) $4\sqrt[3]{5} - 6\sqrt[3]{5}$ $-2\sqrt[3]{5}$

f) $\sqrt{7} + \sqrt{7}$ $2\sqrt{7}$

g) $\sqrt{10} + \sqrt{10}$ $2\sqrt{10}$

h) $9\sqrt{5} + \sqrt{5}$ $10\sqrt{5}$

i) $3\sqrt[5]{2} - 8\sqrt[5]{2}$ $-5\sqrt[5]{2}$

j) $8\sqrt[3]{7} - 13\sqrt[3]{7}$ $-5\sqrt[3]{7}$

2) Efetue as adições e subtrações:

a) $7\sqrt{2} - 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2}$ $6\sqrt{2}$

b) $5\sqrt{3} - 2\sqrt{3} - 6\sqrt{3}$ $-3\sqrt{3}$

c) $9\sqrt{5} - \sqrt{5} + 2\sqrt{5}$ $10\sqrt{5}$

d) $7\sqrt{7} - 2\sqrt{7} - 3\sqrt{7}$ $2\sqrt{7}$

e) $8\sqrt[3]{6} - \sqrt[3]{6} - 9\sqrt[3]{6}$ $-2\sqrt[3]{6}$

f) $\sqrt[4]{8} + \sqrt[4]{8} - 4\sqrt[4]{8}$ $-2\sqrt[4]{8}$

3º Caso: *Os radicais tornam-se semelhantes depois de simplificados.*

Exemplos:

a) $5\sqrt{3} + \sqrt{12} = 5\sqrt{3} + \sqrt{2^2 . 3}$

$= 5\sqrt{3} + 2\sqrt{3}$

$= 7\sqrt{3}$

b) $\sqrt{8} + 10\sqrt{2} - \sqrt{50} = \sqrt{2^3} + 10\sqrt{2} - \sqrt{2 . 5^2}$

$= \sqrt{2^2 . 2} + 10\sqrt{2} - 5\sqrt{2}$

$= 2\sqrt{2} + 10\sqrt{2} - 5\sqrt{2}$

$= 7\sqrt{2}$

EXERCÍCIOS

1) Simplifique os radicais e efetue as operações:

a) $\sqrt{2} + \sqrt{32}$ $5\sqrt{2}$

b) $\sqrt{27} + \sqrt{3}$ $4\sqrt{3}$

c) $3\sqrt{5} + \sqrt{20}$ $5\sqrt{5}$

d) $2\sqrt{2} + \sqrt{8}$ $4\sqrt{2}$

e) $\sqrt{27} + 5\sqrt{3}$ $8\sqrt{3}$

f) $2\sqrt{7} + \sqrt{28}$ $4\sqrt{7}$

g) $\sqrt{50} - \sqrt{98}$ $-2\sqrt{2}$

h) $\sqrt{12} - 6\sqrt{3}$ $-4\sqrt{3}$

i) $8\sqrt{5} - \sqrt{20}$ $6\sqrt{5}$

j) $\sqrt{20} - \sqrt{45}$ $-\sqrt{5}$

2) Simplifique os radicais e efetue as operações:

a) $\sqrt{28} - 10\sqrt{7}$ $-8\sqrt{7}$

b) $9\sqrt{2} + 3\sqrt{50}$ $24\sqrt{2}$

c) $6\sqrt{3} + \sqrt{75}$ $11\sqrt{3}$

d) $2\sqrt{50} + 6\sqrt{2}$ $16\sqrt{2}$

e) $\sqrt{98} + 5\sqrt{18}$ $22\sqrt{2}$

f) $3\sqrt{98} - 2\sqrt{50}$ $11\sqrt{2}$

g) $3\sqrt{8} - 7\sqrt{50}$ $-29\sqrt{2}$

h) $2\sqrt{32} - 5\sqrt{18}$ $-7\sqrt{2}$

3) Simplifique os radicais e efetue as operações:

a) $\sqrt{75} - 2\sqrt{12} + \sqrt{27}$ $4\sqrt{3}$

b) $\sqrt{12} - 9\sqrt{3} + \sqrt{75}$ $-2\sqrt{3}$

c) $\sqrt{98} - \sqrt{18} - 5\sqrt{32}$ $-16\sqrt{2}$

d) $5\sqrt{180} + \sqrt{245} - 17\sqrt{5}$ $20\sqrt{5}$

REDUÇÃO DE RADICAIS AO MENOR ÍNDICE COMUM

Dois ou mais radicais com índices diferentes podem ser expressos como radicais de mesmo índice.

Exemplo:

Reduzir $\sqrt[3]{7}$, $\sqrt{3}$ e $\sqrt[4]{5^2}$ ao mesmo índice comum.

Solução:

a) Calcula-se o m.m.c. dos índices.

$$\text{m.m.c.}(3, 2, 4) = 12$$

b) Divide-se o m.m.c. pelos índices de cada radical e multiplica-se o quociente obtido pelo expoente do radicando.

$$\sqrt[12]{7^4},\ \sqrt[12]{3^6} \text{ e } \sqrt[12]{5^6}$$

EXERCÍCIOS

1) Reduza ao menor índice comum os radicais:

a) $\sqrt[6]{7}$ e $\sqrt{3}$ $\sqrt[6]{7}$ e $\sqrt[6]{3^3}$

b) $\sqrt[5]{3}$ e $\sqrt{7}$ $\sqrt[10]{3^2}$ e $\sqrt[10]{7^5}$

c) $\sqrt[3]{5}$ e $\sqrt[6]{2}$ $\sqrt[6]{5^2}$ e $\sqrt[6]{2}$

d) $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{5}$ e $\sqrt[4]{4}$ $\sqrt[12]{3^6}$, $\sqrt[12]{5^4}$ e $\sqrt[12]{4^3}$

e) $\sqrt{7^3}$, $\sqrt[5]{2}$ e $\sqrt{5}$ $\sqrt[10]{7^{15}}$, $\sqrt[10]{2^2}$ e $\sqrt[10]{5^5}$

f) $\sqrt[6]{5}$, $\sqrt{2^2}$ e $\sqrt[3]{3^4}$ $\sqrt[6]{5}$, $\sqrt[6]{2^6}$ e $\sqrt[6]{3^8}$

2) Qual é o maior: $\sqrt{5}$ ou $\sqrt[3]{10}$?

Solução:

Vamos reduzir os radicais ao mesmo índice. O m.m.c. entre 2 e 3 é 6.

- $\sqrt{5} = \sqrt[6]{5^3} = \sqrt[6]{125}$
- $\sqrt[3]{10} = \sqrt[6]{10^2} = \sqrt[6]{100}$

Logo: $\sqrt{5} > \sqrt[3]{10}$

3) Qual é o maior: $\sqrt{5}$ ou $\sqrt[3]{2}$? $\sqrt{5}$

4) Qual é o maior: $\sqrt[3]{4}$ ou $\sqrt[4]{3}$? $\sqrt[3]{4}$

B) MULTIPLICAÇÃO E DIVISÃO

1º Caso: *Os radicais têm o mesmo índice.*

Efetuamos a operação entre os radicandos.

Exemplos:

a) $\sqrt{5} . \sqrt{7} = \sqrt{5 . 7} = \sqrt{35}$

b) $4\sqrt{2} . 5\sqrt{3} = (4 . 5)\sqrt{2 . 3} = 20\sqrt{6}$

c) $\sqrt[4]{10} : \sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{10 : 2} = \sqrt[4]{5}$

d) $15\sqrt{6} : 3\sqrt{2} = (15 : 3)\sqrt{6 : 2} = 5\sqrt{3}$

2º Caso: *Os radicais não têm o mesmo índice.*

Inicialmente devemos reduzi-los ao mesmo índice.

Exemplos:

a) $\sqrt[3]{2} . \sqrt{5} = \sqrt[6]{2^2} . \sqrt[6]{5^3}$
$= \sqrt[6]{4} . \sqrt[6]{125}$
$= \sqrt[6]{500}$

b) $\sqrt[5]{7} : \sqrt{3} = \sqrt[10]{7^2} : \sqrt[10]{3^5}$
$= \sqrt[10]{49} : \sqrt[10]{243}$
$= \sqrt[10]{\dfrac{49}{243}}$

EXERCÍCIOS

1) Efetue as multiplicações e divisões:

a) $\sqrt{2} . \sqrt{7}$ $\sqrt{14}$

b) $\sqrt[3]{5} . \sqrt[3]{10}$ $\sqrt[3]{50}$

c) $\sqrt[4]{6} . \sqrt[4]{2}$ $\sqrt[4]{12}$

d) $\sqrt{15} . \sqrt{2}$ $\sqrt{30}$

e) $\sqrt[3]{7} . \sqrt[3]{4}$ $\sqrt[3]{28}$

f) $\sqrt{15} : \sqrt{3}$ $\sqrt{5}$

g) $\sqrt[3]{20} : \sqrt[3]{2}$ $\sqrt[3]{10}$

h) $\sqrt[4]{15} : \sqrt[4]{5}$ $\sqrt[4]{3}$

i) $\sqrt{40} : \sqrt{8}$ $\sqrt{5}$

j) $\sqrt[3]{30} : \sqrt[3]{10}$ $\sqrt[3]{3}$

2) Multiplique os radicais e simplifique o produto obtido:

a) $\sqrt{2} . \sqrt{18}$ 6

b) $\sqrt{32} . \sqrt{2}$ 8

c) $\sqrt[5]{8} . \sqrt[5]{4}$ 2

d) $\sqrt[3]{49} . \sqrt[3]{7}$ 7

e) $\sqrt[3]{4} . \sqrt[3]{2}$ 2

f) $\sqrt{3} . \sqrt{12}$ 6

g) $\sqrt{3} . \sqrt{75}$ 15

h) $\sqrt{2} . \sqrt{3} . \sqrt{6}$ 6

3) Efetue as multiplicações e divisões:

a) $2\sqrt{3} . 5\sqrt{7}$ $10\sqrt{21}$

b) $3\sqrt{7} . 2\sqrt{5}$ $6\sqrt{35}$

c) $2\sqrt[3]{5} . 3\sqrt[3]{3}$ $6\sqrt[3]{15}$

d) $5\sqrt{3} . \sqrt{7}$ $5\sqrt{21}$

e) $12\sqrt[4]{25} : 2\sqrt[4]{5}$ $6\sqrt[4]{5}$

f) $18\sqrt[3]{14} : 6\sqrt[3]{7}$ $3\sqrt[3]{2}$

g) $10\sqrt{8} : 2\sqrt{2}$ $5\sqrt{4}$

h) $20\sqrt{2} : 5\sqrt{3}$ $4\sqrt{\frac{2}{3}}$

4) Efetue as multiplicações e divisões:

a) $\sqrt[5]{a} . \sqrt[5]{am}$ $\sqrt[5]{a^2m}$

b) $\sqrt[9]{a^5} : \sqrt[9]{a^3}$ $\sqrt[9]{a^2}$

c) $\sqrt[3]{a} . \sqrt[5]{a}$ $\sqrt[15]{a^8}$

d) $\sqrt{5} : \sqrt[7]{5}$ $\sqrt[14]{5^5}$

e) $\sqrt{5} . \sqrt[4]{5}$ $\sqrt[4]{5^3}$

f) $\sqrt{12} : \sqrt[3]{2}$ $\sqrt[6]{432}$

C) POTENCIAÇÃO

Observe o exemplo: $(\sqrt[7]{2})^5$

Vamos aplicar a definição de potenciação.

$$(\sqrt[7]{2})^5 = \sqrt[7]{2} \cdot \sqrt[7]{2} \cdot \sqrt[7]{2} \cdot \sqrt[7]{2} \cdot \sqrt[7]{2}$$

$$= \sqrt[7]{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}$$

$$= \sqrt[7]{2^5}$$

Conclusão:

Conservamos o índice e elevamos o radicando à potência indicada.

De modo geral: $(\sqrt[n]{a})^p = \sqrt[n]{a^p}$

Exemplos:

a) $(\sqrt[7]{3})^4 = \sqrt[7]{3^4}$

b) $(\sqrt[3]{m^2})^2 = \sqrt[3]{m^4}$

c) $(5\sqrt[3]{7})^2 = 5^2 \cdot \sqrt[3]{7^2} = 25\sqrt[3]{49}$

d) $(2\sqrt[7]{2})^3 = 2^3 \cdot \sqrt[7]{2^3} = 8\sqrt[7]{8}$

EXERCÍCIOS

1) Efetue as potenciações:

a) $(\sqrt[3]{7})^2$ *$\sqrt[3]{7^2}$*

b) $(\sqrt[5]{2})^3$ *$\sqrt[5]{2^3}$*

c) $(\sqrt[6]{5})^5$ *$\sqrt[6]{5^5}$*

d) $(\sqrt[3]{a})^2$ *$\sqrt[3]{a^2}$*

e) $(\sqrt[5]{m^2})^2$ *$\sqrt[5]{m^4}$*

f) $(\sqrt[7]{m^2})^3$ *$\sqrt[7]{m^6}$*

2) Calcule as seguintes potências:

Resolvido. $(\sqrt{3})^4 = \sqrt{3^4} = 3^2 = 9$

a) $(\sqrt{5})^4$ *25*

b) $(\sqrt{3})^6$ *27*

c) $(\sqrt{5})^6$ *125*

d) $(\sqrt[3]{3})^9$ *27*

e) $(\sqrt[3]{5})^4$ *$5\sqrt[3]{5}$*

f) $(\sqrt[5]{2})^7$ *$2\sqrt[5]{2^2} = 2\sqrt[5]{4}$*

3) Efetue as potenciações:

a) $(3\sqrt[3]{7})^2$ $9\sqrt[3]{49}$

b) $(4\sqrt[5]{3})^2$ $16\sqrt[5]{9}$

c) $(2\sqrt[7]{5})^3$ $8\sqrt[7]{125}$

d) $(3\sqrt{5})^2$ $9\sqrt{5^2} = 45$

e) $(2\sqrt[3]{2})^3$ $8\sqrt[3]{2^3} = 16$

f) $(5\sqrt{3})^2$ $25\sqrt{3^2} = 75$

D) **RADICIAÇÃO**

Observe:

❶ $\sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$

❷ $\sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{2^6} = 2$

Comparando ❶ e ❷, temos:

$$\sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[6]{64}$$

Conclusão:

Conservamos o radicando e multiplicamos os índices.

De modo geral: $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

Exemplos:

a) $\sqrt[3]{\sqrt{5}} = \sqrt[3 \cdot 2]{5} = \sqrt[6]{5}$

b) $\sqrt{\sqrt{7}} = \sqrt[2 \cdot 2]{7} = \sqrt[4]{7}$

EXERCÍCIOS

1) Escreva, usando um único radical:

a) $\sqrt{\sqrt[3]{8}}$ $\sqrt[6]{8}$

b) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{5}}$ $\sqrt[12]{5}$

c) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{2}}$ $\sqrt[15]{2}$

d) $\sqrt{\sqrt{3}}$ $\sqrt[4]{3}$

e) $\sqrt[3]{\sqrt{5}}$ $\sqrt[6]{5}$

f) $\sqrt[4]{\sqrt{\sqrt[5]{7}}}$ $\sqrt[40]{7}$

g) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{a}}}$ $\sqrt[8]{a}$

h) $\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt{8}}}$ $\sqrt[12]{8}$

2) Calcule e simplifique:

Resolvido. $\sqrt{\sqrt{48}} = \sqrt[4]{48} = \sqrt[4]{2^4 . 3} = 2\sqrt[4]{3}$

a) $\sqrt{\sqrt{80}}$ $2\sqrt[4]{5}$

b) $\sqrt{\sqrt{162}}$ $3\sqrt[4]{2}$

c) $\sqrt[3]{\sqrt{320}}$ $2\sqrt[6]{5}$

d) $\sqrt[5]{\sqrt{1024}}$ 2

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1) Simplifique os radicais e efetue as operações:

a) $\sqrt{2} - \sqrt{8}$ $-\sqrt{2}$

b) $\sqrt{54} + \sqrt{96}$ $7\sqrt{6}$

c) $\sqrt{63} - \sqrt{28}$ $\sqrt{7}$

d) $-\sqrt{12} + 6\sqrt{3}$ $4\sqrt{3}$

e) $\sqrt[5]{64} - 3\sqrt[5]{2}$ $-\sqrt[5]{2}$

f) $2\sqrt{27} - \sqrt{75}$ $\sqrt{3}$

2) Simplifique as expressões:

a) $A = \sqrt[3]{3} + 2\sqrt[3]{24} - \sqrt[3]{192}$ $\sqrt[3]{3}$

b) $B = \frac{1}{3}\sqrt{27} + 2\sqrt{3}$ $3\sqrt{3}$

c) $C = \frac{1}{10}\sqrt{50} - \frac{1}{6}\sqrt{18}$ 0

d) $D = \frac{\sqrt{63} + \sqrt{28}}{\sqrt{63} - \sqrt{28}}$ 5

3) Multiplique os radicais e simplifique o produto obtido:

a) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{20}$ 10

b) $\sqrt[4]{8} \cdot \sqrt[4]{32}$ 4

c) $\sqrt[5]{4} \cdot \sqrt[5]{8}$ 2

d) $\sqrt[3]{6} \cdot \sqrt[3]{9}$ $3\sqrt[3]{2}$

e) $\sqrt{6} \cdot \sqrt{12}$ $6\sqrt{2}$

f) $\sqrt[3]{12} \cdot \sqrt[3]{6}$ $2\sqrt[3]{9}$

4) Divida os radicais e simplifique o quociente obtido:

a) $\sqrt{20} : \sqrt{5}$ 2

b) $\sqrt[3]{88} : \sqrt[3]{11}$ 2

c) $\sqrt{80} : \sqrt{5}$ 4

d) $\sqrt[5]{128} : \sqrt[5]{4}$ 2

5) Simplifique os radicais:

a) $\sqrt[3]{\sqrt{64}}$ 2

b) $\sqrt{\sqrt{16}}$ 2

c) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{512}}$ 2

d) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{256}}}$ 2

TESTES

1) Nas sentenças abaixo, assinale com V as verdadeiras e, com F, as falsas:

I) $\sqrt{4} + \sqrt{9} = 5$

II) $\sqrt{9} + \sqrt{16} = \sqrt{25}$

III) $\sqrt{3} + \sqrt{4} = 2 + \sqrt{3}$

Nesta ordem, a alternativa correta é:

■ a) V, F, V

b) V, V, F

c) V, F, F

d) F, V, V

2) Considere as afirmações:

I) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{32} = 8$ *(V)*

II) $\sqrt[5]{a} \cdot \sqrt[5]{a^4} = a$ *(V)*

III) $\sqrt[3]{24} : \sqrt[3]{3} = 2$ *(V)*

Quantas são verdadeiras?

a) 0
b) 1
c) 2
■ d) 3

3) (PUC-SP) Os números $\sqrt[4]{5}$, $\sqrt[3]{3}$ e $\sqrt{2}$ são colocados:

■ a) em ordem decrescente.
b) em ordem crescente.
c) em ordem não decrescente.
d) nada disso.

$\sqrt[12]{5^3}$, $\sqrt[12]{3^4}$ e $\sqrt[12]{2^6}$

$\sqrt[12]{125}$, $\sqrt[12]{81}$ e $\sqrt[12]{64}$

4) O valor da expressão $6\sqrt{7} \cdot 7\sqrt{6}$ é:

a) $13\sqrt{13}$
b) $42\sqrt{13}$
c) $13\sqrt{42}$
■ d) $42\sqrt{42}$

5) Se $a = 7\sqrt{10}$, $b = -2\sqrt{10}$ e $c = -6\sqrt{10}$, o valor de $a + b + c$ é:

a) $\sqrt{10}$
b) $\sqrt{30}$
■ c) $-\sqrt{10}$
d) $-\sqrt{30}$

6) (UF-GO) O número $\sqrt{18} - \sqrt{8} - \sqrt{2}$ é igual a:

a) $\sqrt{18}$
b) $\sqrt{18} - \sqrt{6}$
■ c) 0
d) 4

7) (PUC-SP) A expressão com radicais $\sqrt{8} - \sqrt{18} + 2\sqrt{2}$ é igual a:

■ a) $\sqrt{2}$

b) $\sqrt{12}$

c) $-\sqrt{8}$

d) $-3\sqrt{2}$

8) (UF-CE) Simplificando a expressão: $3\sqrt{2} - 2\sqrt{18} + 3\sqrt{72}$, obtemos:

a) $3\sqrt{2}$

$3\sqrt{2} - 6\sqrt{2} + 18\sqrt{2} = 15\sqrt{2}$

b) $24\sqrt{2}$

■ c) $15\sqrt{2}$

d) $-15\sqrt{2}$

9) (F. OBJETIVO-SP) Se $x = \sqrt{2}$ e $y = \sqrt{98} - \sqrt{32} - \sqrt{8}$ então:

a) $y = 3x$

$y = 7\sqrt{2} - 4\sqrt{2} - 2\sqrt{2}$

b) $y = 5x$

$y = \sqrt{2}$

■ c) $y = x$

d) $y = 7x$

10) (FCC-SP) A expressão $\sqrt{5000} + \sqrt{500}$ é igual a:

a) $60\sqrt{2}$

$\sqrt{5000} + \sqrt{500} = 2 \cdot 5^2\sqrt{2} + 2 \cdot 5\sqrt{5}$

b) $60\sqrt{5}$

$= 50\sqrt{2} + 10\sqrt{5}$

$= 10(\sqrt{5} + 5\sqrt{2})$

c) $5(10\sqrt{2} + \sqrt{5})$

■ d) $10(\sqrt{5} + 5\sqrt{2})$

11) (UF-MG) O quociente $(7\sqrt{3} - 5\sqrt{48} + 2\sqrt{192}) : 3\sqrt{3}$ é igual a:

a) 2

$(7\sqrt{3} - 5 \cdot 4\sqrt{3} + 2 \cdot 8\sqrt{3}) : 3\sqrt{3} =$

■ b) 1

$= 3\sqrt{3} : 3\sqrt{3} = 1$

c) $3\sqrt{3}$

d) $2\sqrt{3}$

4

RACIONALIZAÇÃO DE DENOMINADORES

FATOR RACIONALIZANTE

Uma expressão com radical é chamada **fator racionalizante** de outra quando o produto delas é uma expressão sem radical.

Exemplos:

❶ Qual é o fator racionalizante de $\sqrt{7}$?

Resposta:

- O fator racionalizante de $\sqrt{7}$ é $\sqrt{7}$.
- **Explicando:** $\sqrt{7} . \sqrt{7} = \sqrt{7^2} = 7$

produto sem radical

❷ Qual é o fator racionalizante de $5\sqrt{3}$?

Resposta:

- O fator racionalizante de $5\sqrt{3}$ é $\sqrt{3}$.
- **Explicando:**

$$5\sqrt{3} . \sqrt{3} = 5\sqrt{3^2} = 5 . 3 = 15$$

produto sem radical

❸ Qual é o fator racionalizante de $\sqrt[5]{7^3}$?

Resposta:

- O fator racionalizante de $\sqrt[5]{7^3}$ é $\sqrt[5]{7^2}$
- **Explicando:**

$$\sqrt[5]{7^3} . \sqrt[5]{7^2} = \sqrt[5]{7^5} = 7$$

produto sem radical

❹ Qual é o fator racionalizante de $\sqrt{5} + \sqrt{2}$?

Resposta:

- O fator racionalizante de $(\sqrt{5} + \sqrt{2})$ é $(\sqrt{5} - \sqrt{2})$
- **Explicando:**

$$(\sqrt{5} + \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{5} - \sqrt{2}) = (\sqrt{5})^2 - (\sqrt{2})^2$$
$$= 5 - 2$$
$$= 3$$

produto sem radical

Observe que, no produto da soma pela diferença, aplicamos a "regra" já conhecida:

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$

❺ Qual é o fator racionalizante de $3\sqrt{5} - 2$?

Resposta:

- O fator racionalizante de $(3\sqrt{5} - 2)$ é $(3\sqrt{5} + 2)$.
- **Explicando:**

$$(3\sqrt{5} - 2) \cdot (3\sqrt{5} + 2) = (3\sqrt{5})^2 - (2)^2$$
$$= 9 \cdot 5 - 4$$
$$= 45 - 4$$
$$= 41$$

produto sem radical

EXERCÍCIOS

1) Escreva o fator racionalizante de cada expressão:

a) $\sqrt{5}$ $(\sqrt{5})$

b) $\sqrt{10}$ $(\sqrt{10})$

c) $\sqrt{12}$ $(\sqrt{12})$

d) $3\sqrt{7}$ $(\sqrt{7})$

e) $8\sqrt{3}$ $(\sqrt{3})$

f) $6\sqrt{11}$ $(\sqrt{11})$

2) Escreva o fator racionalizante de cada expressão:

a) $\sqrt[3]{5}$ $(\sqrt[3]{5^2})$

b) $\sqrt[5]{6^2}$ $(\sqrt[5]{6^3})$

c) $\sqrt[4]{9}$ $(\sqrt[4]{9^3})$

d) $8\sqrt[3]{7^2}$ $(\sqrt[3]{7})$

e) $4\sqrt[5]{8^3}$ $(\sqrt[5]{8^2})$

f) $9\sqrt[6]{2^5}$ $(\sqrt[6]{2})$

3) Escreva o fator racionalizante de cada expressão:

a) $\sqrt{8}+\sqrt{5}$ $(\sqrt{8}-\sqrt{5})$

b) $\sqrt{6}-\sqrt{2}$ $(\sqrt{6}+\sqrt{2})$

c) $\sqrt{7}-5$ $(\sqrt{7}+5)$

d) $\sqrt{3}+1$ $(\sqrt{3}-1)$

e) $5+2\sqrt{7}$ $(5-2\sqrt{7})$

f) $2\sqrt{3}-\sqrt{5}$ $(2\sqrt{3}+\sqrt{5})$

4) Efetue as multiplicações:

Resolvido. $\sqrt{5}\,.\,\sqrt{5}=\sqrt{5^2}=5$

a) $\sqrt{10}\,.\,\sqrt{10}$ 10

b) $3\sqrt{7}\,.\,\sqrt{7}$ 21

c) $8\sqrt{3}\,.\,\sqrt{3}$ 24

d) $4\sqrt{5}\,.\,\sqrt{5}$ 20

5) Efetue as multiplicações:

Resolvido. $\sqrt[3]{5}\,.\,\sqrt[3]{5^2}=\sqrt[3]{5^3}=5$

a) $\sqrt[5]{6^2}\,.\,\sqrt[5]{6^3}$ 6

b) $8\sqrt[3]{7^2}\,.\,\sqrt[3]{7}$ 56

c) $4\sqrt[6]{8^4}\,.\,\sqrt[6]{8^2}$ 32

d) $5\sqrt[7]{2^4}\,.\,\sqrt[7]{2^3}$ 10

6) Efetue as multiplicações:

Resolvido. $(\sqrt{8}+\sqrt{5})\,.\,(\sqrt{8}-\sqrt{5})=(\sqrt{8})^2-(\sqrt{5})^2=8-5=3$

a) $(\sqrt{6}-\sqrt{2})\,.\,(\sqrt{6}+\sqrt{2})$ 4

b) $(\sqrt{3}+1)\,.\,(\sqrt{3}-1)$ 2

c) $(5+2\sqrt{7})\,.\,(5-2\sqrt{7})$ -3

RACIONALIZAÇÃO DE DENOMINADORES

Racionalizar o denominador de uma fração é obter uma fração equivalente com denominador racional.

Recordemos a propriedade fundamental das frações:

Uma fração não se altera quando o numerador e o denominador são multiplicados por um mesmo número, diferente de zero.

Vamos estudar os casos mais comuns de racionalização.

1º Caso: *O denominador é um radical de índice 2.*

Exemplos:

❶ $$\frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{5}\,.\,\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{5^2}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

❷ $$\frac{5}{3\sqrt{7}} = \frac{5\sqrt{7}}{3\sqrt{7}\,.\,\sqrt{7}} = \frac{5\sqrt{7}}{3\sqrt{7^2}} = \frac{5\sqrt{7}}{3\,.\,7} = \frac{5\sqrt{7}}{21}$$

EXERCÍCIOS

Racionalize os denominadores das frações:

a) $\frac{4}{\sqrt{3}}$ $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

b) $\frac{7}{\sqrt{2}}$ $\frac{7\sqrt{2}}{2}$

c) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ $\frac{\sqrt{5}}{5}$

d) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}}$ $\frac{\sqrt{30}}{5}$

e) $\frac{4}{3\sqrt{2}}$ $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

f) $\frac{5}{2\sqrt{6}}$ $\frac{5\sqrt{6}}{12}$

g) $\frac{\sqrt{2}}{7\sqrt{3}}$ $\frac{\sqrt{6}}{21}$

h) $\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{3}}$ $\frac{\sqrt{21}}{6}$

2) Caso: *O denominador é um radical com índice diferente de 2.*

Exemplos:

❶ $$\frac{7}{\sqrt[5]{6^3}} = \frac{7\sqrt[5]{6^2}}{\sqrt[5]{6^3}\,.\,\sqrt[5]{6^2}} = \frac{7\sqrt[5]{36}}{\sqrt[5]{6^5}} = \frac{7\sqrt[5]{36}}{6}$$

❷ $$\frac{8}{\sqrt[3]{5}} = \frac{8\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5}\,.\,\sqrt[3]{5^2}} = \frac{8\sqrt[3]{25}}{\sqrt[3]{5^3}} = \frac{8\sqrt[3]{25}}{5}$$

EXERCÍCIOS

Racionalize os denominadores das frações:

a) $\frac{7}{\sqrt[3]{7}}$ $\sqrt[3]{7^2}$

b) $\frac{5}{\sqrt[3]{2}}$ $\frac{5\sqrt[3]{2^2}}{2}$

c) $\frac{2}{\sqrt[5]{3^4}}$ $\frac{2\sqrt[5]{3}}{3}$

d) $\frac{10}{\sqrt[5]{4^2}}$ $\frac{5\sqrt[5]{4^3}}{2}$

e) $\frac{5}{\sqrt[3]{6}}$ $\frac{5\sqrt[3]{6^2}}{6}$

f) $\frac{2}{3\sqrt[3]{5}}$ $\frac{2\sqrt[3]{5^2}}{15}$

g) $\frac{8}{5\sqrt[4]{3^2}}$ $\frac{8\sqrt[4]{3^2}}{15}$

h) $\frac{7}{3\sqrt[4]{10}}$ $\frac{7\sqrt[4]{10^3}}{30}$

i) $\frac{1}{\sqrt[7]{a^3}}$ $\frac{\sqrt[7]{a^4}}{a}$

3º Caso: *O denominador é uma soma ou diferença de dois termos, sendo pelo menos um dos termos um radical.*

Exemplos:

❶
$$\frac{4}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} = \frac{4(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{(\sqrt{5}+\sqrt{2}).(\sqrt{5}-\sqrt{2})}$$
$$= \frac{4(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{2})^2}$$
$$= \frac{4(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{5-2}$$
$$= \frac{4(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{3}$$

❷
$$\frac{5}{3-\sqrt{2}} = \frac{5(3+\sqrt{2})}{(3-\sqrt{2}).(3+\sqrt{2})}$$
$$= \frac{5(3+\sqrt{2})}{3^2-(\sqrt{2})^2}$$
$$= \frac{5(3+\sqrt{2})}{9-2}$$
$$= \frac{5(3+\sqrt{2})}{7}$$

EXERCÍCIOS

Racionalize os denominadores das frações:

a) $\dfrac{8}{\sqrt{7}-\sqrt{2}}$ $\quad \dfrac{8(\sqrt{7}+\sqrt{2})}{5}$

b) $\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$ $\quad \dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}$

c) $\dfrac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$ $\quad \sqrt{7}+\sqrt{5}$

d) $\dfrac{4}{5-\sqrt{3}}$ $\quad \dfrac{4(5+\sqrt{3})}{22}$

e) $\dfrac{1}{\sqrt{5}-1}$ $\quad \dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$

f) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$ $\quad \dfrac{\sqrt{3}(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{2}$

g) $\dfrac{6}{5-3\sqrt{2}}$ $\quad \dfrac{30+18\sqrt{2}}{7}$

h) $\dfrac{7}{3\sqrt{5}-2}$ $\quad \dfrac{21\sqrt{5}+14}{41}$

i) $\dfrac{4+\sqrt{3}}{4-\sqrt{3}}$ $\quad \dfrac{(4+\sqrt{3})^2}{13}$

j) $\dfrac{3}{5+\sqrt{7}}$ $\quad \dfrac{5-\sqrt{7}}{6}$

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1) Racionalize os denominadores das frações:

a) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ $\quad \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

b) $\dfrac{8}{\sqrt{2}}$ $\quad 4\sqrt{2}$

c) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{11}}$ $\quad \dfrac{\sqrt{33}}{11}$

d) $\dfrac{5}{3\sqrt{10}}$ $\quad \dfrac{\sqrt{10}}{6}$

e) $\dfrac{7}{3\sqrt{5}}$ $\quad \dfrac{7\sqrt{5}}{15}$

f) $\dfrac{1}{\sqrt{a}}$ $\quad \dfrac{\sqrt{a}}{a}$

g) $\dfrac{a^2}{\sqrt{a}}$ $\quad a\sqrt{a}$

h) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{7}}$ $\quad \dfrac{2\sqrt[3]{49}}{7}$

i) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}$ $\quad \dfrac{\sqrt[3]{4^2}}{4}$

j) $\dfrac{7}{\sqrt[3]{3}}$ $\quad \dfrac{7\sqrt[3]{3^2}}{3}$

l) $\dfrac{1}{5\sqrt[3]{4}}$ $\quad \dfrac{\sqrt[3]{4^2}}{20}$

m) $\dfrac{4}{3\sqrt[3]{2}}$ $\quad \dfrac{2\sqrt[3]{2^2}}{3}$

2) Racionalize os denominadores das frações:

a) $\frac{5}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ $5(\sqrt{3}-\sqrt{2})$

b) $\frac{2}{\sqrt{7}-3}$ $-(\sqrt{7}+3)$

c) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}-2}$ $\frac{\sqrt{14}+2\sqrt{2}}{3}$

d) $\frac{10}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ $-10(\sqrt{2}+\sqrt{3})$

e) $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$ $\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{2}$

f) $\frac{7}{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ $\frac{7(2\sqrt{3}+\sqrt{2})}{10}$

g) $\frac{3}{3-2\sqrt{3}}$ $-(3+2\sqrt{3})$

h) $\frac{-5}{\sqrt{3}-2\sqrt{2}}$ $\sqrt{3}+2\sqrt{2}$

TESTES

1) O valor da expressão $(7\sqrt{2}-5)(7\sqrt{2}+5)$ é:

a) 24

■ b) 73

c) 23

d) 63

2) Se $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ e $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$, então:

■ a) x é igual a y

b) x é o inverso de y

c) x é o dobro de y

d) x é a metade de y

3) Racionalizando o denominador de $\frac{2}{\sqrt{5}+1}$, vamos obter:

a) $\frac{2(\sqrt{5}-1)}{3}$

■c) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

b) $\frac{2(\sqrt{5}-1)}{8}$

d) $\frac{2(\sqrt{5}-1)}{9}$

4) (FUVEST-SP) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$ é igual a:

a) $\frac{2+\sqrt{6}}{6}$

c) $\frac{\sqrt{6}+3}{6}$

b) $\frac{5+2\sqrt{6}}{3}$

■d) $\frac{3+\sqrt{6}}{3}$

5) (CESGRANRIO-RJ) Racionalizando o denominador, vemos que a razão $\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$ é igual a:

■a) $2+\sqrt{3}$

b) $2+2\sqrt{3}$

c) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$

d) $1+2\sqrt{3}$

$$\frac{(1+\sqrt{3})^2}{(\sqrt{3})^2-1^2} = \frac{1+2\sqrt{3}+3}{3-1} = 2+\sqrt{3}$$

6) (FIUBE-MG) Racionalizando-se o denominador da fração $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$, obtém-se:

a) $\sqrt{15}-3$

■b) $\sqrt{15}+3$

c) $\frac{\sqrt{15}-3}{2}$

d) $\frac{\sqrt{15}+3}{2}$

$$\frac{2\sqrt{3}(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2} = \frac{2\sqrt{15}+6}{2} = \sqrt{15}+3$$

7) (PUC-SP) O valor da expressão $\frac{1-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$ é:

a) $-(1-\sqrt{3})$

■ b) $-(1+\sqrt{3})$

c) $1+\sqrt{3}$

d) $1-\sqrt{3}$

$$\frac{(1-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}{4-3} =$$
$$= -1-\sqrt{3} = -(1+\sqrt{3})$$

8) (FUVEST-SP) O valor da expressão $\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$ é:

■ a) $\sqrt{2}$

b) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

c) 2

d) $\frac{1}{2}$

$$\frac{(2-\sqrt{2})(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} =$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$

9) (F. OBJETIVO - SP) $\frac{4+\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}}$ é igual a:

a) $\sqrt{5}+1$

b) $\sqrt{5}-1$

c) $\sqrt{5}+3$

■ d) $2\sqrt{5}-3$

$$\frac{(4+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})}{(2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})} =$$
$$= \frac{3-2\sqrt{5}}{2^2-(\sqrt{5})^2} = 2\sqrt{5}-3$$

10) (FUVEST - SP) Qual é o valor da expressão

$$\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} + \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} ?$$

■ a) 4

b) 3

c) 2

d) $\sqrt{2}$

$$\frac{(\sqrt{3}+1)^2+(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} =$$
$$= \frac{3+\cancel{2\sqrt{3}}+1+3-\cancel{2\sqrt{3}}+1}{3-1} = 4$$

5

EQUAÇÕES DO 2º GRAU

DEFINIÇÃO

Uma equação do 2º grau com uma variável tem a forma:

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (a \neq 0)$$

sendo:

- **x** a **incógnita,**
- **a, b** e **c** números reais, chamados **coeficientes.**

Exemplos:

1. $x^2 - 7x + 10 = 0$, onde $a = 1$, $b = -7$ e $c = 10$.
2. $5x^2 - x - 3 = 0$, onde $a = 5$, $b = -1$ e $c = -3$.
3. $8x^2 - 4x = 0$, onde $a = 8$; $b = -4$ e $c = 0$.
4. $-3x^2 + 2 = 0$, onde $a = -3$, $b = 0$ e $c = 2$.
5. $9x^2 = 0$, onde $a = 9$, $b = 0$ e $c = 0$.

Observe que:

- **a** representa o coeficiente de x^2;
- **b** representa o coeficiente de x;
- **c** representa o termo independente.

EXERCÍCIOS

1) Quais são equações do 2º grau?

■ a) $x^2 + 2x + 1 = 0$

b) $8x - 5x - 2 = 0$

■ c) $7x^2 - 8x + 3 = 0$

d) $0x^2 + 5x - 8 = 0$

■ e) $5x^2 - 1 = 0$

■ f) $6x^2 - 8x = 0$

g) $x^3 - 5x^2 + 4 = 0$

h) $x - 7x - 1 = 0$

2) Determine os valores dos coeficientes **a**, **b** e **c** nas equações seguintes:

a) $2x^2 - 8x + 7 = 0$ *$a = 2; b = -8; c = 7$*

b) $x^2 - 5x + 6 = 0$ *$a = 1; b = -5; c = 6$*

c) $3x^2 - 7x - 4 = 0$ *$a = 3; b = -7; c = -4$*

d) $x^2 - x - 6 = 0$ *$a = 1; b = -1; c = -6$*

e) $-x^2 - 4x + 9 = 0$ *$a = -1; b = -4; c = 9$*

f) $-8x^2 - x - 1 = 0$ *$a = -8; b = -1; c = -1$*

g) $4x^2 - 16 = 0$ *$a = 4; b = 0; c = -16$*

h) $x^2 - 3x = 0$ *$a = 1; b = -3; c = 0$*

i) $5x^2 - 28 = 0$ *$a = 5; b = 0; c = -28$*

j) $6x^2 = 0$ *$a = 6; b = 0; c = 0$*

3) Coloque na forma $ax^2 + bx + c = 0$ as seguintes equações do 2º grau:

Resolvido.

$$x(x - 2) = 3(x + 6)$$
$$x^2 - 2x = 3x + 18$$
$$x^2 - 2x - 3x - 18 = 0$$
$$x^2 - 5x - 18 = 0$$

a) $5x + 3x^2 = 4x - 7$ *$3x^2 + x + 7 = 0$*

b) $x^2 + 4x = 2(x - 1)$ *$x^2 + 2x + 2 = 0$*

c) $x(2x - 3) = 4x - 1$ *$2x^2 - 7x + 1 = 0$*

d) $4x(x + 3) + 9 = 0$ *$4x^2 + 12x + 9 = 0$*

e) $x(x - 2) + 1 = 2(x + 3)$ *$x^2 - 4x - 5 = 0$*

4) Coloque na forma $ax^2 + bx + c = 0$ as seguintes equações do 2º grau:

Resolvido.	$(x + 3)^2 = 1$
	$x^2 + 6x + 9 = 1$
	$x^2 + 6x + 9 - 1 = 0$
	$x^2 + 6x + 8 = 0$

a) $(x - 5)^2 - 9 = 0$ *$x^2 - 10x + 16 = 0$*

b) $(x + 1)^2 - x = 7$ *$x^2 + x - 6 = 0$*

c) $(x + 4)^2 = 3(x + 2)$ *$x^2 + 5x + 10 = 0$*

d) $(x - 2)(x + 1) = 3$ *$x^2 - x - 5 = 0$*

e) $4x^2 - 1 = (x + 3)(x - 3)$ *$3x^2 + 8 = 0$*

EQUAÇÕES COMPLETAS E INCOMPLETAS

A equação $ax^2 + bx + c = 0$, ($a \neq 0$), é chamada:

- **Equação completa:** quando $b \neq 0$ e $c \neq 0$.

  Exemplos: a) $3x^2 + 8x - 1 = 0$

  b) $x^2 - 6x + 5 = 0$

- **Equação incompleta:** quando $b = 0$ ou $c = 0$, ou ambos são nulos.

  Exemplos: a) $5x^2 - 8x = 0$ ($c = 0$)

  b) $x^2 - 15 = 0$ ($b = 0$)

  c) $4x^2 = 0$ ($b = 0$ e $c = 0$)

EXERCÍCIOS

Classifique as equações do 2º grau em completa ou incompleta:

a) $x^2 - 8 = 0$ *incompleta*

b) $2x^2 - 1 = 0$ *incompleta*

c) $4x^2 + 6x = 0$ *incompleta*

d) $3x^2 - x - 1 = 0$ *completa*

e) $x^2 - 8x + 9 = 0$ *completa*

f) $x^2 + 7 = 0$ *incompleta*

g) $5x^2 = 0$ *incompleta*

h) $x^2 - 12x + 48 = 0$ *completa*

i) $-x^2 - 8x = 0$ *incompleta*

j) $7 - 2x + x^2 = 0$ *completa*

RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES INCOMPLETAS EM $\mathbb{R}$

Resolver uma equação é determinar todas as suas soluções. Vejamos, através de exemplos, como se resolvem as equações incompletas do 2º grau:

1º CASO: *Equações da forma* $ax^2 + c = 0$, *(b = 0).*

Exemplos:

Resolver as seguintes equações, sendo $U = \mathbb{R}$:

1 $x^2 - 25 = 0$

$x^2 = 25$ — **Transpondo – 25 para o 2º membro.**

$x = \pm\sqrt{25}$

$x = \pm 5$

Logo: $V = \{+5, -5\}$

2 $2x^2 - 18 = 0$

$2x^2 = 18$ — **Transpondo – 18 para o 2º membro.**

$x^2 = \frac{18}{2}$

$x^2 = 9$

$x = \pm\sqrt{9}$

$x = \pm 3$

Logo: $V = \{+3, -3\}$

3 $7x^2 - 14 = 0$

$7x^2 = 14$ — **Transpondo – 14 para o 2º membro.**

$x^2 = \frac{14}{7}$

$x^2 = 2$

$x = \pm\sqrt{2}$

Logo: $V = \{+\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$

4 $x^2 + 25 = 0$

$x^2 = -25$

$x = \pm\sqrt{-25}$ = **nenhum real**, pois (**nenhum real**)$^2 = -25$

Logo: $V = \varnothing$

EXERCÍCIOS

1) Resolva as seguintes equações do 2º grau, sendo $U = \mathbb{R}$:

a) $x^2 - 49 = 0$ $V = \{7, -7\}$

b) $x^2 = 1$ $V = \{1, -1\}$

c) $2x^2 - 50 = 0$ $V = \{5, -5\}$

d) $7x^2 - 7 = 0$ $V = \{1, -1\}$

e) $4x^2 = 36$ $V = \{3, -3\}$

f) $5x^2 - 15 = 0$ $V = \{\sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$

g) $21 = 7x^2$ $V = \{\sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$

h) $5x^2 + 20 = 0$ $V = \varnothing$

i) $4x^2 - 49 = 0$ $V = \left\{\frac{7}{2}, -\frac{7}{2}\right\}$

j) $16 = 9x^2$ $V = \left\{\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}\right\}$

l) $3x^2 + 30 = 0$ $V = \varnothing$

m) $9x^2 - 5 = 0$ $V = \left\{\frac{\sqrt{5}}{3}, -\frac{\sqrt{5}}{3}\right\}$

2) Resolva as equações do 2º grau, sendo $U = \mathbb{R}$:

a) $7x^2 + 2 = 30$ $V = \{2, -2\}$

b) $2x^2 - 90 = 8$ $V = \{7, -7\}$

c) $4x^2 - 27 = x^2$ $V = \{3, -3\}$

d) $8x^2 = 60 - 7x^2$ $V = \{2, -2\}$

3) Resolva as equações do 2º grau, sendo $U = \mathbb{R}$:

a) $3(x^2 - 1) = 24$ $V = \{3, -3\}$

b) $2(x^2 - 1) = x^2 + 7$ $V = \{3, -3\}$

c) $5(x^2 - 1) = 4(x^2 + 1)$ $V = \{3, -3\}$

d) $(x - 3)(x + 4) + 8 = x$ $V = \{2, -2\}$

2º CASO: *Equações da forma* $ax^2 + bx = 0$, *(c = 0).*

Propriedade:

Para que um produto seja nulo é preciso que um dos fatores seja zero.

Exemplos:

1 Resolver: $x^2 - 5x = 0$

Fatorando: $x(x-5) = 0$ → $x = 0$ ou $x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5$

Logo: $V = \{0, 5\}$

2 Resolver: $3x^2 - 10x = 0$

Fatorando: $x(3x - 10) = 0$ → $x = 0$ ou $3x - 10 = 0$

$3x = 10$

$x = \frac{10}{3}$

Logo: $V = \left\{0, \frac{10}{3}\right\}$

Observe que, nesse caso, uma das raízes é sempre zero.

EXERCÍCIOS

1) Resolva as seguintes equações do 2º grau, sendo $U = \mathbb{R}$:

a) $x^2 - 7x = 0$ $V = \{0, 7\}$

b) $x^2 + 5x = 0$ $V = \{0, -5\}$

c) $4x^2 - 9x = 0$ $V = \left\{0, \frac{9}{4}\right\}$

d) $3x^2 + 5x = 0$ $V = \left\{0, -\frac{5}{3}\right\}$

e) $4x^2 - 12x = 0$ $V = \{0, 3\}$

f) $5x^2 + x = 0$ $V = \left\{0, -\frac{1}{5}\right\}$

g) $x^2 + x = 0$ $V = \{0, -1\}$

h) $7x^2 - x = 0$ $V = \left\{0, \frac{1}{7}\right\}$

i) $2x^2 = 7x$ $V = \left\{0, \frac{7}{2}\right\}$

j) $2x^2 = 8x$ $V = \{0, 4\}$

l) $7x^2 = -14x$ $V = \{0, -2\}$

m) $-2x^2 + 10x = 0$ $V = \{0, 5\}$

2) Resolva as seguintes equações do 2º grau, sendo $U = \mathbb{R}$:

a) $x^2 + x(x - 6) = 0$ $V = \{0, 3\}$

b) $x(x + 3) = 5x$ $V = \{0, 2\}$

c) $x(x - 3) - 2(x - 3) = 6$ $V = \{0, 5\}$

d) $(x + 5)^2 = 25$ $V = \{0, -10\}$

e) $(x - 2)^2 = 4 - 9x$ $V = \{0, -5\}$

f) $(x + 1)(x - 3) = -3$ $V = \{0, 2\}$

FÓRMULA GERAL DE RESOLUÇÃO

Seja a equação:

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (a \neq 0)$$

Vamos transformá-la em equações equivalentes, de modo que o primeiro membro seja um quadrado perfeito.

1. Transpomos c para o 2º membro:
   $ax^2 + bx = -c$
2. Multiplicamos ambos os membros por 4a ($a \neq 0$):
   $4a^2x^2 + 4abx = -4ac$
3. Adicionamos b^2 a ambos os membros:
   $4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$
4. Fatoramos o primeiro membro:
   $(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$
5. Extraímos a raiz quadrada de ambos os membros:
   $2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$
6. Isolando x:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

(Fórmula de Báscara)

Notas:

- Esta fórmula permite achar as raízes de **qualquer** equação do 2º grau, completa ou incompleta.
- A expressão $b^2 - 4ac$ chama-se discriminante e é indicada pela letra grega Δ (lê-se: delta).

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Então, se $\Delta \geqslant 0$, podemos escrever:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Se $\Delta < 0$, a equação não tem raízes reais.

Exemplos:

Resolver as seguintes equações do 2º grau, sendo U = IR.

Exemplo 1

$3x^2 - 7x + 2 = 0$

Solução:

$a = 3$

$b = -7$

$c = 2$

$\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$

$\Delta = (-7)^2 - 4 . 3 . 2$

$\Delta = 49 - 24$

$\Delta = 25$

Substituindo na fórmula:

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}}$$

$$x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{25}}{2 . 3} = \frac{7 \pm 5}{6}$$

$$x' = \frac{7 + 5}{6} = \frac{12}{6} = 2$$

$$x'' = \frac{7 - 5}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Logo: $V = \left\{2, \frac{1}{3}\right\}$

Exemplo 2

$x^2 - 6x + 9 = 0$

Solução:

$a = 1$

$b = -6$

$c = 9$

$\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$

$\Delta = (-6)^2 - 4 . 1 . 9$

$\Delta = 36 - 36$

$\Delta = 0$

Substituindo na fórmula:

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}}$$

$$x' = \frac{6+0}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm 0}{2}$$

$$x'' = \frac{6-0}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

Logo: $V = \{3\}$

Exemplo 3

$x^2 + 4x + 10 = 0$

Solução:

$a = 1$
$b = 4$
$c = 10$

$\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$

$\Delta = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10$
$\Delta = 16 - 40$
$\Delta = -24$

Como $\Delta < 0$, a equação não tem raízes reais.
Logo: $V = \varnothing$

NÚMERO DE RAÍZES

Através dos três exemplos estudados, podemos observar que:

- Se $\Delta > 0$, a equação tem duas raízes reais e diferentes.
- Se $\Delta = 0$, a equação tem duas raízes reais e iguais.
- Se $\Delta < 0$, a equação não tem raízes reais.

EXERCÍCIOS

Resolva as equações do 2º grau em $\mathbb{R}$:

1) $x^2 - 5x + 6 = 0$ $V = \{2, 3\}$
2) $x^2 - 8x + 12 = 0$ $V = \{2, 6\}$
3) $x^2 + 2x - 8 = 0$ $V = \{2, -4\}$
4) $x^2 - 5x + 8 = 0$ $V = \varnothing$
5) $2x^2 - 8x + 8 = 0$ $V = \{2\}$
6) $x^2 - 4x - 5 = 0$ $V = \{-1, 5\}$
7) $-x^2 + x + 12 = 0$ $V = \{-3, 4\}$
8) $-x^2 + 6x - 5 = 0$ $V = \{1, 5\}$
9) $6x^2 + x - 1 = 0$ $V = \left\{\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}\right\}$
10) $3x^2 - 7x + 2 = 0$ $V = \left\{2, \frac{1}{3}\right\}$

Exemplo 4

Resolva a equação $4x^2 - 2x = 6x - 4$ em $\mathbb{R}$:

Solução:

$$4x^2 - 2x = 6x - 4$$
$$4x^2 - 2x - 6x + 4 = 0$$
$$4x^2 - 8x + 4 = 0$$

• Reduzindo os termos semelhantes.

Temos: $\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$

$a = 4$ $\quad \Delta = (-8)^2 - 4 . 4 . 4$

$b = -8$ $\quad \Delta = 64 - 64$

$c = 4$ $\quad \Delta = 0$

Substituindo na fórmula:

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}}$$

$$x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{0}}{2 . 4} = \frac{8 \pm 0}{8}$$

$$x' = \frac{8 + 0}{8} = \frac{8}{8} = 1$$

$$x'' = \frac{8 - 0}{8} = \frac{8}{8} = 1$$

Logo: $V = \{1\}$

EXERCÍCIOS

1) Escreva as equações abaixo na forma geral e resolva em $\mathbb{R}$:

a) $2x^2 - 7x = 15$ $V = \left\{5, -\frac{3}{2}\right\}$

b) $4x^2 + 9 = 12x$ $V = \left\{\frac{3}{2}\right\}$

c) $x^2 = x + 12$ $V = \{-3, 4\}$

d) $2x^2 = -12x - 18$ $V = \{-3\}$

e) $x^2 + 9 = 4x$ $V = \varnothing$

f) $25x^2 = 20x - 4$ $V = \left\{\frac{2}{5}\right\}$

g) $2x^2 = -5 - 7x$ $V = \left\{-1, -\frac{5}{2}\right\}$

h) $2x^2 = -3 + 7x$ $V = \left\{\frac{1}{2}, 3\right\}$

i) $2x = 15 - x^2$ $V = \{3, -5\}$

j) $7x - 12 = x^2$ $V = \{3, 4\}$

2) Escreva as equações abaixo na forma geral e resolva em $\mathbb{R}$:

a) $x^2 = x + 1$ $V = \left\{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right\}$

b) $x^2 + x - 7 = 5$ $V = \{-4, 3\}$

c) $x^2 + 3x - 6 = -8$ $V = \{-1, -2\}$

d) $4x^2 - x + 1 = x + 3x^2$ $V = \{1\}$

e) $3x^2 + 5x = -x - 9 + 2x^2$ $V = \{-3\}$

f) $3x^2 + 7x + 3 = x^2 + 2x$ $V = \left\{-1, -\frac{3}{2}\right.$

Exemplo 5

Resolva a equação $x(x-6)+8=0$ em $\mathbb{R}$:

Solução:

$x(x-6)+8=0$ • Eliminando os parênteses.

$x^2-6x+8=0$

Temos: $\boxed{\Delta = b^2-4ac}$

$a=1$

$b=-6$

$c=8$

$\Delta = (-6)^2-4.1.8$

$\Delta = 36-32$

$\Delta = 4$

Substituindo na fórmula:

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}}$$

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{4}}{2.1} = \frac{6 \pm 2}{2}$$

$$x' = \frac{6+2}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$x'' = \frac{6-2}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Logo: $V = \{4, 2\}$

EXERCÍCIOS

Escreva as equações abaixo na forma geral e resolva em $\mathbb{R}$:

1) $x(x+3)-40=0$ $V=\{5,-8\}$

2) $10+x(x-2)=2$ $V=\varnothing$

3) $4+x(x-4)=x$ $V=\{1,4\}$

4) $x(x+5)-2x=28$ $V=\{-7,4\}$

5) $2x(x+3)=x^2+3x+70$ $V=\{-10,7\}$

6) $(x+1)(x-2)=3$ $V=\left\{\frac{1+\sqrt{21}}{2}, \frac{1-\sqrt{21}}{2}\right\}$

7) $(x-1)(x+5)=7$ $V=\{2,-6\}$

8) $(x-3)(x+2)=-4$ $V=\{2,-1\}$

9) $(x+5)(x-3)-x=5$ $V=\{4,-5\}$

10) $(x+3)(x-4)-52=-x$ $V=\{8,-8\}$

Exemplo 6

Resolva a equação $(x + 1)^2 = 4x + 4$ em $\mathbb{R}$:

Solução:

$$(x + 1)^2 = 4x + 4$$
$$x^2 + 2x + 1 = 4x + 4$$
$$x^2 + 2x - 4x + 1 - 4 = 0$$
$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

- Eliminando os parênteses.
- Reduzindo os termos semelhantes.

Temos:

$$\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$$

$a = 1$
$b = -2$
$c = -3$

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)$$
$$\Delta = 4 + 12$$
$$\Delta = 16$$

Substituindo na fórmula:

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}}$$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 4}{2}$$

$$x' = \frac{2 + 4}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$x'' = \frac{2 - 4}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

Logo: $V = \{3, -1\}$

EXERCÍCIOS

Resolva as equações do 2º grau em $\mathbb{R}$:

1) $(x - 3)^2 = 16$ $V = \{7, -1\}$
2) $(2x - 3)^2 = 25$ $V = \{4, -1\}$
3) $(x + 1)^2 - x = 7$ $V = \{2, -3\}$
4) $(x - 1)^2 = x + 5$ $V = \{-1, 4\}$
5) $(1 - x)^2 - 3x = 1$ $V = \{0, 5\}$
6) $(2x - 1)^2 = (x + 5)^2$ $V = \left\{6, -\frac{4}{3}\right\}$
7) $(3x - 2)^2 = (2 - x)^2$ $V = \{0, 1\}$
8) $(x - 2)^2 + (x + 1)^2 = 5$ $V = \{0, 1\}$
9) $(x - 1)^2 + 8(x + 1) = 0$ $V = \{-3\}$
10) $(2x - 1)^2 - (x + 2)^2 = -2x$ $V = \{1 + \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2}\}$

Exemplo 7

Resolva a equação $x^2 - \frac{5x}{4} = \frac{3}{2}$ em $\mathbb{R}$:

Solução:

$$x^2 - \frac{5x}{4} = \frac{3}{2}$$

• O m.m.c. dos denominadores é 4

$$\frac{4x^2}{4} - \frac{5x}{4} = \frac{6}{4}$$

• Eliminando os denominadores.

$$4x^2 - 5x - 6 = 0$$

Temos:

$$\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$$

$a = 4$ $\Delta = (-5)^2 - 4 . 4 . (-6)$

$b = -5$ $\Delta = 25 + 96$

$c = -6$ $\Delta = 121$

Substituindo na fórmula:

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}}$$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{121}}{2 . 4} = \frac{5 \pm 11}{8}$$

$$x' = \frac{5 + 11}{8} = \frac{16}{8} = 2$$

$$x'' = \frac{5 - 11}{8} = \frac{-6}{8} = -\frac{3}{4}$$

Logo: $V = \left\{2, -\frac{3}{4}\right\}$

EXERCÍCIOS

1) Resolva as equações do 2º grau em $\mathbb{R}$:

a) $\frac{x^2}{3} - 2x + 3 = 0$ $V = \{3\}$

b) $x^2 - x - \frac{3}{4} = 0$ $V = \left\{\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right\}$

c) $x^2 - \frac{7x}{12} = \frac{5}{6}$ $V = \left\{-\frac{2}{3}, \frac{5}{4}\right\}$

d) $\frac{x^2}{5} - \frac{x}{3} = \frac{2}{15}$ $V = \left\{2, -\frac{1}{3}\right\}$

2) Resolva as equações do 2º grau em $\mathbb{R}$:

a) $\frac{x^2}{2} + 3 = \frac{5}{2}x$ $V = \{2, 3\}$

b) $3x^2 + \frac{1}{2}x = -\frac{2}{3}$ $V = \varnothing$

c) $\frac{x^2}{2} = 3x - \frac{5}{2}$ $V = \{5, 1\}$

d) $x^2 - \frac{x}{3} = 8$ $V = \left\{3, -\frac{8}{3}\right\}$

e) $\frac{x^2}{2} - \frac{1}{5} = \frac{3x-1}{5}$ $V = \left\{0, \frac{6}{5}\right\}$

f) $x^2 + \frac{28x-4}{35} = \frac{x}{7}$ $V = \left\{\frac{1}{7}, -\frac{4}{5}\right\}$

g) $\frac{5x^2+3}{4} - \frac{17-x^2}{2} = 8$ $V = \{3, -3\}$

h) $\frac{x^2-2x}{4} = \frac{1}{4} + \frac{x}{2}$ $V = \{2+\sqrt{5}, 2-\sqrt{5}\}$

3) (FUVEST-SP) Resolva a equação $\frac{1}{2} - x = 6\left(\frac{1}{3} - x\right)$ no conjunto $\mathbb{R}$.

$V = \left\{\frac{3}{10}\right\}$

4) Resolva as equações em $\mathbb{R}$:

a) $x^2 - 0{,}7x + 0{,}1 = 0$ $V = \{0{,}5 ; 0{,}2\}$

b) $x^2 - 2{,}5x + 1 = 0$ $V = \{2 ; 0{,}5\}$

EQUAÇÕES FRACIONÁRIAS REDUTÍVEIS A EQUAÇÕES DO 2º GRAU

Nessas equações (há incógnita no denominador), devemos garantir que nenhum dos denominadores se anule.

Exemplos:

a) $x + \frac{1}{x} = 7$ $(x \neq 0)$

b) $\frac{2}{3x} + \frac{3}{x-1} = \frac{5}{7}$ $(x \neq 0 \text{ e } x \neq 1)$

c) $\frac{5}{1-x} - \frac{x}{2x+3} = 2$ $\left(x \neq 1 \text{ e } x \neq -\frac{3}{2}\right)$

Vejamos, através de exemplos, como se resolvem as equações fracionárias.

Exemplo 1

Resolver em IR a equação $x + \dfrac{1}{x-3} = 5$ sendo $x \neq 3$.

Solução:

- O m.m.c. é x – 3.

$$\frac{x(x-3)}{x-3} + \frac{1}{x-3} = \frac{5(x-3)}{x-3}$$

- Eliminando os denominadores.

$$x(x-3) + 1 = 5(x-3)$$
$$x^2 - 3x + 1 = 5x - 15$$

- Transpondo e reduzindo.

$$x^2 - 3x - 5x + 1 + 15 = 0$$
$$x^2 - 8x + 16 = 0$$

Temos:

$a = 1$
$b = -8$
$c = 16$

$$\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$$
$$\Delta = (-8)^2 - 4 \,.\, 1 \,.\, 16$$
$$\Delta = 64 - 64$$
$$\Delta = 0$$

Substituindo na fórmula:

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}}$$

$$x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{0}}{2 \,.\, 1} = \frac{8 \pm 0}{2}$$

$$x' = \frac{8+0}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$x'' = \frac{8-0}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

Logo: $V = \{ 4 \}$

Exemplo 2

Resolver em IR a equação $\frac{4x}{x-1} + \frac{x-10}{x} = 4$ sendo $x \neq 0$ e $x \neq 1$.

Solução:

$$\frac{4x^2}{x(x-1)} + \frac{(x-1)(x-10)}{x(x-1)} = \frac{4x(x-1)}{x(x-1)}$$

• O m.m.c. é $x(x-1)$.

$$4x^2 + (x-1)(x-10) = 4x^2 - 4x$$

• Eliminando os denominadores.

$$4x^2 + x^2 - 11x + 10 - 4x^2 + 4x = 0$$

• Transpondo e reduzindo.

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$

Temos:

$a = 1$
$b = -7$
$c = 10$

$$\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$$

$$\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10$$
$$\Delta = 49 - 40$$
$$\Delta = 9$$

Substituindo na fórmula:

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}}$$

$$x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \frac{7 \pm 3}{2}$$

$$x' = \frac{7+3}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

$$x'' = \frac{7-3}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Logo: $V = \{5, 2\}$

EXERCÍCIOS

1) Resolva as equações do 2º grau em $\mathbb{R}$:

a) $x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}$ $(x \neq 0)$ $V = \left\{2, \frac{1}{2}\right\}$

b) $\frac{x}{3} - \frac{9}{x} = -2$ $(x \neq 0)$ $V = \{3, -9\}$

c) $x + \frac{3}{x-2} = 6$ $(x \neq 2)$ $V = \{3, 5\}$

d) $x + \frac{1}{x-4} = 6$ $(x \neq 4)$ $V = \{5\}$

e) $x + \frac{1}{x-5} = 7$ $(x \neq 5)$ $V = \{6\}$

f) $\frac{1}{x} + \frac{5}{x^2} - 6 = 0$ $(x \neq 0)$ $V = \left\{1, -\frac{5}{6}\right\}$

g) $\frac{3x+2}{2x^2} + \frac{x-4}{3x} = \frac{1}{2}$ $(x \neq 0)$ $V = \{3, -2\}$

h) $\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-1} = \frac{3}{2}$ $(x \neq 2, x \neq 1)$ $V = \left\{3, \frac{4}{3}\right\}$

i) $\frac{8}{x-5} + \frac{7}{x-2} = 3$ $(x \neq 5, x \neq 2)$ $V = \{3, 9\}$

j) $\frac{2}{3x} + \frac{2}{x-1} + \frac{5}{3} = 0$ $(x \neq 0, x \neq 1)$ $V = \left\{-1, \frac{2}{5}\right\}$

l) $\frac{x}{x-1} + \frac{2}{x^2-1} = 0$ $(x \neq 1 \text{ e } x \neq -1)$ $V = \{-2\}$

2) (UEG-RJ) Sendo $\frac{x^2 - 2x}{3x - 6} = 1$, qual é o valor de x?
$V = \{3\}$ Obs.: O 2 anula o denominador.

3) (UF-BA) Resolver a equação $\frac{x+4}{x-2} + 1 = \frac{10+2x}{5}$.
$V = \{5, -3\}$

4) (FUVEST-SP) Resolver a equação $\frac{2}{x^2-1} + \frac{1}{x+1} = -1$.
$V = \{0\}$ Obs.: O −1 anula o denominador.

5) (FUVEST-SP) Resolver a equação $\frac{x+2}{2} + \frac{2}{x-2} = -\frac{1}{2}$.
$V = \{-2, 1\}$

EQUAÇÕES LITERAIS

Nessas equações, além da incógnita x, aparecem outras letras (a, b, c, m, n . . .), que são chamadas de parâmetros. Vamos resolver a equação:

$$x^2 - 2mx - 8m^2 = 0$$

Solução:

Temos:

$$\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$$

$a = 1$

$b = -2m$

$c = -8m^2$

$$\Delta = (-2m)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8m^2)$$
$$\Delta = 4m^2 + 32m^2$$
$$\Delta = 36m^2$$

Substituindo na fórmula:

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}}$$

$$x = \frac{-(-2m) \pm \sqrt{36m^2}}{2.1} = \frac{2m \pm 6m}{2} \begin{cases} x' = \dfrac{8m}{2} = 4m \\ x'' = \dfrac{-4m}{2} = -2m \end{cases}$$

Logo: $V = \{4m, -2m\}$

EXERCÍCIOS

Resolva as equações literais:

1) $x^2 - cx - 6c^2 = 0$ $V = \{3c, -2c\}$
2) $x^2 - 6mx + 5m^2 = 0$ $V = \{5m, m\}$
3) $x^2 - 2ax + a^2 = 0$ $V = \{a\}$
4) $2x^2 - 3ax + a^2 = 0$ $V = \left\{a, \frac{a}{2}\right\}$
5) $4x^2 - 4mx + m^2 = 0$ $V = \left\{\frac{m}{2}\right\}$
6) $2x^2 + ax = 3a^2$ $V = \left\{a, -\frac{3}{2}a\right\}$
7) $x^2 - 4mx = 5m^2$ $V = \{-m, 5m\}$
8) $x^2 - 5abx - 24a^2b^2 = 0$ $V = \{8ab, -3ab\}$
9) $x^2 - 2mx + m^2 - n^2 = 0$ $V = \{m + n, m - n\}$
10) $x^2 - (a - 2b) \cdot x - 2ab = 0$ $V = \{a, -2b\}$

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1) Resolva as equações do 2º grau em IR:

a) $x^2 = 7x - 10$ $V = \{2, 5\}$

b) $2x^2 + 1 = 3x$ $V = \left\{1, \frac{1}{2}\right\}$

c) $2x^2 - 3 = x$ $V = \left\{\frac{3}{2}, -1\right\}$

d) $3x^2 = 16 - 2x$ $V = \left\{2, -\frac{8}{3}\right\}$

e) $3 + 2x^2 + 5x = 0$ $V = \left\{\frac{3}{2}, -1\right\}$

f) $2 + 3x + x^2 = 0$ $V = \{-1, -2\}$

2) (FUVEST-SP) Resolva a equação $10x^2 - 7x + 1 = 0$. $V = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{5}\right\}$

3) (F.S.A.-SP) Quais são as raízes da equação $6x^2 - 13x + 6 = 0$?
As raízes são: $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{2}$

4) Resolva as equações do 2º grau em IR:

a) $x(x + 1) = 30$ $V = \{5, -6\}$

b) $x^2 + 2(x + 1) = 5$ $V = \{-3, 1\}$

c) $2x(4x - 2) - 4 = 0$ $V = \left\{1, -\frac{1}{2}\right\}$

d) $(6x + 2)^2 - 16 = 0$ $V = \left\{\frac{1}{3}, -1\right\}$

e) $(x + 1)^2 = x + 7$ $V = \{2, -3\}$

f) $(2x - 3)^2 = 8x$ $V = \left\{\frac{1}{2}, \frac{9}{2}\right\}$

g) $(4x + 1)^2 = (3x - 7)^2$ $V = \left\{-8, \frac{6}{7}\right\}$

h) $x^2 + (x + 1)^2 = 25$ $V = \{3, -4\}$

i) $x^2 + (x - 3)^2 = (x + 3)^2$ $V = \{0, 12\}$

j) $3x^2 + 3 = (2x + 1)^2 + 4$ $V = \{-2 + \sqrt{2}, -2 - \sqrt{2}\}$

5) Resolva as equações do 2º grau em IR:

a) $x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{8} = 0$ $V = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right\}$

b) $\frac{x^2}{5} - \frac{x}{15} = 0$ $V = \left\{0, \frac{1}{3}\right\}$

c) $x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} = 0$ $V = \left\{1, \frac{1}{2}\right\}$

d) $\frac{x^2}{2} + 3x = 8$ $V = \{2, -8\}$

e) $\frac{x^2}{3} - \frac{8}{3} = \frac{x}{9}$ $V = \left\{3, -\frac{8}{3}\right\}$

f) $\frac{x^2}{4} + \frac{1}{9} - \frac{x}{3} = 0$ $V = \left\{\frac{2}{3}\right\}$

g) $x^2 - \frac{19}{15}x + \frac{2}{5} = 0$ $V = \left\{\frac{2}{3}, \frac{3}{5}\right\}$

h) $\frac{3x^2}{8} - \frac{9}{8} = \frac{2x-1}{4}$ $V = \left\{\frac{7}{3}, -1\right\}$

6) Resolva as equações do 2º grau em IR, sendo $x \neq 0$:

a) $\frac{x}{2} - \frac{4}{x} = 1$ $V = \{4, -2\}$

b) $x - 4 = \frac{5}{x}$ $V = \{5, -1\}$

c) $\frac{5}{x^2} = 4 + \frac{3}{x}$ $V = \left\{\frac{-3+\sqrt{89}}{8}, \frac{-3-\sqrt{89}}{8}\right\}$

d) $x = \frac{21}{x} - 20$ $V = \{-21, 1\}$

7) Resolva as equações do 2º grau em $\mathbb{R}$:

a) $\dfrac{x+1}{x-8} + \dfrac{x+1}{x} = 1$ $(x \neq 0, x \neq 8)$ $V = \{2, -4\}$

b) $\dfrac{x}{x+4} + \dfrac{x}{x+1} = 1$ $(x \neq -4, x \neq -1)$ $V = \{2, -2\}$

c) $\dfrac{x-1}{x+1} = 1 + \dfrac{x}{x-2}$ $(x \neq -1, x \neq 2)$ $V = \{-4, 1\}$

d) $\dfrac{5}{x-2} + \dfrac{5}{x+2} = \dfrac{10}{3}$ $(x \neq 2, x \neq -2)$ $V = \{4, -1\}$

e) $\dfrac{1}{x-2} + \dfrac{1}{x+2} = \dfrac{3-x^2}{x^2-4}$ $(x \neq 2, x \neq -2)$ $V = \{1, -3\}$

8) (SANTA CASA-SP) Resolver a equação $\dfrac{1+x}{x} = \dfrac{x}{1-x}$. $V = \left\{\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

9) Resolva as equações literais:

a) $x^2 + 2mx + m^2 = 0$ $V = \{-m\}$

b) $x^2 + 3ax + 2a^2 = 0$ $V = \{-a, -2a\}$

c) $6x^2 - 5ax + a^2 = 0$ $V = \left\{\dfrac{a}{2}, \dfrac{a}{3}\right\}$

d) $6a^2x^2 - 7ax - 3 = 0$ $V = \left\{\dfrac{3}{2a}, -\dfrac{1}{3a}\right\}$

e) $2x^2 - 8a^2 = 0$ $V = \{2a, -2a\}$

f) $9x^2 - a^2 = 24a^2$ $V = \left\{\dfrac{5}{3}a, -\dfrac{5}{3}a\right\}$

g) $x^2 - abx - 2a^2b^2 = 0$ $V = \{2ab, -ab\}$

h) $x^2 - 2mx + m^2 - n^2 = 0$ $V = \{m+n, m-n\}$

TESTES

1) A menor das raízes da equação $x^2 + x - 12 = 0$ é:

a) 3

b) 4

c) -3

■ d) -4

2) A equação $x^2 - 3x = 10$ admite a:

■ a) raiz -2
b) raiz -5
c) raiz 2
d) raiz 4

3) O conjunto verdade em $\mathbb{R}$ da equação $1 = -10x - 25x^2$ é:

a) $\{-1\}$
■ b) $\left\{-\frac{1}{5}\right\}$
c) $\{5\}$
d) $\{-5\}$

4) (UF-ES) A equação $x^2 - 10x + 25 = 0$ tem as seguintes soluções no conjunto dos números reais:

■ a) somente 5
b) somente 10
c) -5
d) 5 e 10

5) (UC-SP) As raízes da equação $2x^2 - 10 - 8x = 0$ são:

a) $\{1, 5\}$
b) $\{2, 3\}$
■ c) $\{-1, 5\}$
d) $\{-1, -5\}$

6) (PUC-SP) Uma das raízes da equação $0{,}1x^2 - 0{,}7x + 1 = 0$ é:

a) 0,2
b) 0,5
c) 7
■ d) 2

7) Quantas raízes reais tem a equação $4(x - 3)^2 + 24x = 0$?

■ a) 0
b) 1
c) 2
d) 4

8) O conjunto verdade em $\mathbb{R}$ da equação $3(x^2 - 1) = 2x(x + 1)$ é:

a) $\{1, 3\}$
b) $\{1, -3\}$
■ c) $\{-1, 3\}$
d) $\{-1, -3\}$

9) O conjunto verdade em $\mathbb{R}$ da equação $(2x - 1)^2 = (x + 5)^2$ é:

a) $\{6, -3\}$

b) $\left\{6, -\frac{3}{4}\right\}$

c) $\{6, -4\}$

■ d) $\left\{6, -\frac{4}{3}\right\}$

10) O conjunto verdade da equação literal $x^2 + 3m^2 = 4mx$ é:

a) $\{m, 4m\}$

■ b) $\{m, 3m\}$

c) $\{m, -3m\}$

d) $\{-m, 3m\}$

11) (FIB-RJ) Resolva a equação $\frac{x-2}{3x} + \frac{2x-1}{2} = \frac{5x+2}{6}$:

a) $\{-1, 3\}$

■ b) $\{-1, 4\}$

c) $\{1, -4\}$

d) $\{1, -3\}$

12) O conjunto verdade em $\mathbb{R}^*$ da equação $3 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} = 0$ é:

a) $\{-1, 3\}$

b) $\left\{1, -\frac{1}{3}\right\}$

c) $\{1, -3\}$

■ d) $\left\{-1, \frac{1}{3}\right\}$

13) A equação $\frac{x^2}{2} = \frac{3x - 1}{5} + \frac{1}{5}$ tem

a) duas raízes negativas.
b) duas raízes positivas.
■ c) uma raiz nula.
d) raízes simétricas.

14) (FUVEST-SP) Se $x(1 - x) = \frac{1}{4}$, então:

a) $x = 1$
■ b) $x = \frac{1}{2}$
c) $x = 0$
b) $x = \frac{1}{4}$

$x - x^2 = \frac{1}{4}$
$-4x^2 + 4x - 1 = 0$
$x' = x'' = \frac{1}{2}$

15) (UF-SE) A equação $\frac{x - 3}{2} + \frac{1}{x} = -3$, em IR, é verdadeira, se x^2 for igual a:

a) 0
b) 1
c) 4
■ d) 1 ou 4

$x(x - 3) + 2 = -6x$
$\begin{cases} x' = -1 \\ x'' = -2 \end{cases}$
Então: $x^2 = 1$ ou $x^2 = 4$

16) (FUVEST-SP) A equação $\frac{2}{x^2 - 1} + \frac{1}{x + 1} = -1$

■ a) tem apenas uma raiz real.
b) tem duas raízes reais.
c) não tem raiz real.
d) admite 10 como raiz.

$2 + (x - 1) = -(x^2 - 1)$
$x^2 + x = 0$ → $x = 0$; $x = -1$ (anula o denominador)

17) (GV-SP) A equação $x + \frac{5}{x - 5} = 5 + \frac{5}{x - 5}$ tem

a) uma única raiz.
b) infinitas raízes.
c) exatamente duas raízes.
■ d) conjunto – solução vazio.

Obs.: $x' = x'' = 5$ (anula o denominador)

6 EQUAÇÃO DO 2º GRAU DISCUSSÃO E PROPRIEDADES DAS RAÍZES

DISCUSSÃO DAS RAÍZES

Após a resolução de equações do 2º grau, você verificou que a existência e a quantidade de raízes dependem do discriminante $b^2 - 4ac$.

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Numa equação do 2º grau:

- Se $\Delta > 0$, então a equação tem duas raízes reais e diferentes.
- Se $\Delta = 0$, então a equação tem duas raízes reais e iguais.
- Se $\Delta < 0$, então a equação não tem raízes reais.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1 Através do discriminante (Δ), discutir a existência das raízes das equações:

a) $2x^2 + 3x - 5 = 0$

Temos:

$a = 2$

$b = 3$

$c = -5$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-5)$

$\Delta = 9 + 40$

$\Delta = 49$

Logo: $\Delta > 0 \Rightarrow$ **duas raízes reais e diferentes.**

b) $x^2 - 5x + 7 = 0$

Temos:

$a = 1$

$b = -5$

$c = 7$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 7$

$\Delta = 25 - 28$

$\Delta = -3$

Logo: $\Delta < 0 \Rightarrow$ **a equação não admite raiz real.**

2 Calcular o valor de **m** na equação:

$$x^2 - 6x + m = 0$$

de modo que:

a) as raízes sejam reais e diferentes.

b) as raízes sejam reais e iguais.

c) as raízes não sejam reais.

Solução:

Temos:

$a = 1$

$b = -6$

$c = m$

Cálculo do discriminante

$$\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$$

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot m$$

$$\Delta = 36 - 4m$$

a) Se as raízes são reais e desiguais, então: $\Delta > 0$

Logo:

$$36 - 4m > 0$$

$$-4m > -36 \;\bullet$$

$$4m < 36$$

$$m < 9$$

b) Se as raízes são reais e iguais, então: $\Delta = 0$

Logo:

$$36 - 4m = 0$$

$$-4m = -36$$

$$m = 9$$

c) Se as raízes não forem reais, então: $\Delta < 0$

Logo:

$$36 - 4m < 0$$

$$-4m < -36 \;\bullet$$

$$4m > 36$$

$$m > 9$$

Lembrete:

- Multiplicando os dois membros por (–1), a **desigualdade** muda de sentido.

EXERCÍCIOS

1) Através do discriminante (Δ), determine a existência e a quantidade de raízes reais em cada equação:

a) $x^2 - 7x + 10 = 0$

b) $2x^2 + 3x + 5 = 0$

c) $x^2 - 2x + 1 = 0$

d) $7x^2 + 4x + 5 = 0$

e) $4x^2 - 3x + \frac{9}{16} = 0$

f) $2x^2 - 3x - 4 = 0$

g) $4x^2 - 5x + 1 = 0$

h) $2x^2 + 3x + 5 = 0$

i) $-x^2 + 2x - 1 = 0$

j) $2x^2 - \frac{3x}{2} + \frac{1}{4} = 0$

- *Não tem raízes reais : ($\Delta < 0$) : b, d, h*
- *Duas raízes reais e iguais: ($\Delta = 0$) : c, e, i*
- *Duas raízes reais e diferen : ($\Delta > 0$): a, f, g, j*

2) Calcule **m** na equação $2x^2 - 8x + m = 0$, de modo que as raízes sejam reais e iguais. *$\Delta = 0$, então $64 - 8m = 0 \Rightarrow m = 8$*

3) Calcule **p** na equação $x^2 - 7x + p = 0$, de modo que as raízes sejam reais e diferentes. *$\Delta > 0$, então $49 - 4p > 0 \Rightarrow p < \frac{49}{4}$*

4) Calcule **m** na equação $3mx^2 + 4x = 1$, de modo que as raízes sejam reais e iguais. *$\Delta = 0$, então $16 + 12m = 0 \Rightarrow m = -\frac{4}{3}$*

5) Calcule **m** na equação $x^2 - 10x + m = 0$, de modo que

a) as raízes sejam reais e diferentes. *$m < 25$*

b) as raízes sejam reais e iguais. *$m = 25$*

c) as raízes não sejam reais. *$m > 25$*

6) Calcule **K** na equação $3x^2 - 2x + K = 0$, de modo que

a) as raízes sejam reais e diferentes. *$k < \frac{1}{3}$*

b) as raízes sejam reais e iguais. *$k = \frac{1}{3}$*

c) as raízes não sejam reais. *$k > \frac{1}{3}$*

7) Calcule **n** na equação $x^2 - 10x + (n + 1) = 0$, de modo que

a) as raízes sejam reais e diferentes. *$n < 24$*

b) as raízes sejam reais e iguais. *$n = 24$*

c) as raízes não sejam reais. *$n > 24$*

8) (MACK-SP) Determine **a** para que a equação do 2º grau $ax^2 + x + 1 = 0$ admita duas raízes reais distintas.

$1 - 4a > 0 \Rightarrow -4a > -1 \Rightarrow a < \frac{1}{4}$ Resp.: $a < \frac{1}{4}$

PROPRIEDADES DAS RAÍZES

Sejam **x'** e **x"** as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$. Entre as raízes **x'** e **x"** e os coeficientes **a, b** e **c**, existem relações importantes, que estudaremos a seguir.

a) Soma das raízes.

Sendo $\Delta \geqslant 0$, temos:

$$x' + x'' = \frac{-b + \cancel{\sqrt{\Delta}}}{2a} + \frac{-b - \cancel{\sqrt{\Delta}}}{2a}$$

$$x' + x'' = \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a}$$

Então:

$$\text{Soma das raízes} = \frac{-b}{a} \quad \text{ou} \quad S = \frac{-b}{a}$$

b) Produto das raízes.

Sendo $\Delta \geqslant 0$, temos:

$$x' \cdot x'' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x' \cdot x'' = \frac{(-b)^2 - (\sqrt{\Delta})^2}{4a^2} = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2}$$

$$x' \cdot x'' = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{\cancel{b^2} - \cancel{b^2} + 4ac}{4a^2}$$

$$x' \cdot x'' = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

Então:

$$\text{Produto das raízes} = \frac{c}{a} \quad \text{ou} \quad P = \frac{c}{a}$$

Exemplo:

Sem resolver a equação $2x^2 - 6x + 4 = 0$, determine a soma e o produto de suas raízes.

Solução:

Temos:

$a = 2$

$b = -6$

$c = 4$

$$S = \frac{-b}{a} = \frac{-(-6)}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$P = \frac{c}{a} = \frac{4}{2} = 2$$

Resposta: Soma das raízes = 3; produto das raízes = 2.

EXERCÍCIOS

1) Calcule a soma e o produto das raízes das equações, sem resolvê-las:

a) $x^2 - 5x + 6 = 0$ *$S = 5; P = 6$*

b) $2x^2 - 10x - 12 = 0$ *$S = 5; P = -6$*

c) $3x^2 - 21x + 9 = 0$ *$S = 7; P = 3$*

d) $x^2 - 2x - 8 = 0$ *$S = 2; P = -8$*

e) $3x^2 + 10x + 3 = 0$ *$S = -\frac{10}{3}; P = 1$*

f) $9x^2 - 12x - 1 = 0$ *$S = \frac{4}{3}; P = -\frac{1}{9}$*

2) Sabendo que a soma das raízes da equação $2x^2 + (2m - 2)x + 1 = 0$ é -3, calcule **m**. *$x' + x'' = -\frac{b}{a} \Rightarrow -3 = \frac{-(2m-2)}{2} \Rightarrow m = 4$*

3) Sabendo que a soma das raízes da equação $x^2 - (2p - 4)x + 32 = 0$ é 12, calcule **p**. *$x' + x'' = -\frac{b}{a} \Rightarrow 12 = \frac{-[-(2p-4)]}{1} \Rightarrow p = 8$*

4) Sabendo que o produto das raízes da equação $x^2 - 5x + n - 3 = 0$ é 5, calcule **n**. *$x' \cdot x'' = \frac{c}{a} \Rightarrow 5 = \frac{n-3}{1} \Rightarrow n = 8$*

5) Sabendo que o produto das raízes da equação $x^2 - 3x + 2m - 1 = 0$ é 3, calcule **m**. $x' \cdot x'' = \frac{c}{a} \Rightarrow 3 = \frac{2m-1}{1} \Rightarrow m = 2$

6) Determinar **m** na equação $x^2 - 5x + m = 0$, sabendo que uma raiz é 3.

$x' + x'' = \frac{5}{1} = 5$

Se uma das raízes é 3, então: $3 + x'' = 5 \Rightarrow x'' = 2$

Como: $x' \cdot x'' = \frac{c}{a}$, temos $3 \cdot 2 = \frac{m}{1} \Rightarrow m = 6$

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1) Calcule o discriminante (Δ) e responda se as equações seguintes têm raízes reais e distintas ou têm raízes reais e iguais ou não têm raízes reais:

a) $x^2 - 6x - 16 = 0$ *Duas raízes reais e distintas.*

b) $x^2 + x + 8 = 0$ *Não tem raízes reais.*

c) $3x^2 - 9x - 2 = 0$ *Duas raízes reais e distintas.*

d) $4x^2 - 4x + 1 = 0$ *Duas raízes reais e iguais.*

e) $-4x^2 - 5x - 1 = 0$ *Duas raízes reais e distintas.*

f) $-x^2 + 6x - 9 = 0$ *Duas raízes reais e iguais.*

2) Calcule **m** na equação $x^2 - 4x + m = 0$, de modo que

a) as raízes sejam reais e distintas. $m < 4$

b) as raízes sejam reais e iguais. $m = 4$

c) as raízes não sejam reais. $m > 4$

3) Calcule **m** na equação $mx^2 - 3x - 2 = 0$, ($m \neq 0$), de modo que as raízes sejam reais e iguais. *Resp.:* $m = -\frac{9}{8}$

4) Determine **p** na equação $x^2 - 10x + p - 3 = 0$, de modo que as raízes sejam reais e distintas. *Resp.:* $p < 28$

5) Calcule **m** na equação $x^2 - 8x + 2m - 2 = 0$, de modo que as raízes não sejam reais. *Resp.:* $m > 9$

6) (EEMAUÁ-SP) Determinar os valores de **m** para os quais a equação $x^2 + (m + 2)x + (2m + 1) = 0$ admita duas raízes iguais.

$\Delta = (m+2)^2 - 4 . 1 . (2m+1)$ Então: $m^2 - 4m = 0$ → $m = 0$ ou $m = 4$

7) Sem resolver as equações, calcule a soma e o produto das raízes:

a) $x^2 - 7x + 10 = 0$ $S = 7; P = 10$

b) $x^2 + 5x - 7 = 0$ $S = -5; P = -7$

c) $2x^2 - 10x + 12 = 0$ $S = 5; P = 6$

d) $7x^2 + 7x + 1 = 0$ $S = -1; P = \frac{1}{7}$

e) $16x^2 - 3x - 9 = 0$ $S = \frac{3}{16}; P = -\frac{9}{16}$

f) $4x^2 + 9x - 9 = 0$ $S = -\frac{9}{4}; P = -\frac{9}{4}$

8) Determinar **m** na equação $x^2 - 12x + m = 0$, sabendo que uma raiz é 2.

$x' + x'' = \frac{-b}{a} = \frac{12}{1} = 12$ Como: $x' . x'' = \frac{c}{a} \Rightarrow 2 . 10 = \frac{m}{1} \Rightarrow m = 20$

$2 + x'' = 12 \Rightarrow x'' = 10$

9) Determinar **p** na equação $x^2 - 5x + p = 0$, sabendo que uma raiz é -2.

$x' + x'' = \frac{-b}{a} = \frac{5}{1} = 5$ Como: $x' . x'' = \frac{c}{a} \Rightarrow (-2) . 7 = \frac{p}{1} \Rightarrow p = -14$

$-2 + x'' = 5 \Rightarrow x'' = 7$

TESTES

1) (PUC-SP) Quantas raízes reais tem a equação $2x^2 - 2x + 1 = 0$?

■ a) 0
b) 1
c) 2
d) 3

2) A equação $x^2 + 7x + m = 0$ admite duas raízes reais e iguais, se:

a) $m = \frac{4}{49}$
■ b) $m = \frac{49}{4}$
c) $m = -\frac{4}{49}$
d) $m = -\frac{49}{4}$

3) (PUC-SP) A equação $4x^2 + x + m = 0$ tem uma única raiz. Então, **m** é igual a:

a) 0

■ b) $\frac{1}{16}$

c) 1

d) $\frac{1}{32}$

$\Delta = 1 - 16m$

Devemos ter $\Delta = 0$:

$1 - 16m = 0 \Rightarrow m = \frac{1}{16}$

4) A equação $9x^2 - 12x + (m + 3) = 0$ admite duas raízes reais e distintas, se:

a) $m > 1$

■ b) $m < 1$

c) $m > 2$

d) $m < 2$

$(-12)^2 - 4 \cdot 9 \cdot (m+3) > 0$

$144 - 36m + 108 > 0$

$-36m > -36 \cdot (-1)$

$m < 1$

5) Para que a equação $3x^2 - 5x + 5m = 0$ tenha o discriminante nulo, **m** deve ser igual a:

a) 5

b) -5

c) 35

■ d) $\frac{5}{12}$

$(-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (5m) = 0$

$25 - 60m = 0$

$m = \frac{5}{12}$

6) Se -2 é raiz da equação $2x^2 - 3mx + m - 1 = 0$, então o valor de **m** é:

a) 1

b) 7

■ c) -1

d) -7

$2(-2)^2 - 3 \cdot m \cdot (-2) + m - 1 = 0$

$8 + 6m + m - 1 = 0$

$m = -1$

7) (FUVEST-SP) A equação do 2º grau $ax^2 - 4x - 16 = 0$ tem uma raiz cujo valor é 4. A outra raiz é:

a) 1
b) 2
c) -1
■ d) -2

$a \cdot 4^2 - 4 \cdot 4 - 16 = 0 \Rightarrow a = 2$

$x' + 4 = \frac{4}{2} \Rightarrow x' = -2$

8) (UB-DF) A soma das raízes da equação $3x^2 + 6x - 9 = 0$ é igual a:

a) 4
b) 1
■ c) -2
d) -3

$S = \frac{-6}{3} = -2$

9) (PUC-SP) A soma e o produto das raízes da equação $x^2 + x - 1 = 0$ são, respectivamente:

a) -1 e 0
b) 1 e -1
c) -1 e 1
■ d) -1 e -1

$S = \frac{-1}{1} = -1$

$P = \frac{-1}{1} = -1$

10) A soma e o produto das raízes da equação $x^2 - 3mx + 2m^2 = 0$ são, respectivamente:

a) 3m, 2m
■ b) 3m, $2m^2$
c) $-3m$, $2m^2$
d) 3m, $-2m^2$

$S = \frac{-(-3m)}{1} = 3m$

$P = \frac{2m^2}{1} = 2m^2$

11) (CESESP-PE) Qual deve ser o valor de **m** na equação $2x^2 - mx - 40 = 0$ para que a soma de suas raízes seja igual a 8?

a) $m = 8$
b) $m = -8$
■ c) $m = 16$
d) $m = -16$

$8 = \frac{m}{2} \Rightarrow m = 16$

12) O produto das raízes da equação $6x^2 - 2x + (2K + 1) = 0$ é igual a $\frac{1}{2}$.

O valor de K é:

■ a) 1
b) 2
c) 3
d) 4

$P = \frac{2k+1}{6}$

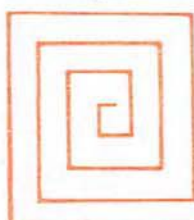
$\frac{1}{2} = \frac{2k+1}{6} \Rightarrow k = 1$

13) (MED-POUSO ALEGRE) O valor de **m** para o qual a equação

$x^2 - 7x + (3 - \frac{m}{2}) = 0$ tem uma raiz nula é:

a) 7
■ b) 6
c) 0
d) -6

$3 - \frac{m}{2} = 0 \Rightarrow m = 6$

7

EQUAÇÕES BIQUADRADAS

DEFINIÇÃO

Chama-se equação biquadrada toda equação que pode ser colocada na forma:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \qquad (a \neq 0)$$

sendo **x** a variável e **a, b** e **c** números reais.

Exemplos:

a) $x^4 - 6x^2 - 10 = 0$

b) $2x^4 + x^2 - 5 = 0$

c) $x^4 - 5x^2 = 0$

d) $2x^4 - 16 = 0$

Observe que:

- a equação é do 4º grau.
- os expoentes da variável são números pares.

EXERCÍCIOS

Quais são equações biquadradas?

■ a) $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$

b) $x^2 - 5x + 6 = 0$

■ c) $x^4 - 7x^2 + 5 = 0$

d) $x^4 - 5x^3 + 8 = 0$

e) $x^2 - 8x + 8 = 0$

■ f) $2x^4 - 3x^2 + 10 = 0$

■ g) $5x^4 - 12 = 0$

■ h) $7x^4 - 21x^2 = 0$

i) $2x^4 - 8x = 0$

j) $x^4 - 4x^3 = 0$

RESOLUÇÃO DE UMA EQUAÇÃO BIQUADRADA EM IR

As equações biquadradas podem ser transformadas em equações do 2º grau, mediante mudança de variável. A seguir, mostraremos a resolução de equações biquadradas no conjunto IR.

1 Resolver a equação: $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$

Solução $(x^2)^2 - 10x^2 + 9 = 0$

Fazendo $x^2 = y$, vem: $y^2 - 10y + 9 = 0$

Temos: $\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$

$a = 1$ $\Delta = (-10)^2 - 4 . 1 . 9$

$b = -10$ $\Delta = 100 - 36$

$c = 9$ $\Delta = 64$

Substituindo na fórmula:

$$\boxed{y = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}}$$

$$y = \frac{-(-10) \pm \sqrt{64}}{2 . 1} = \frac{10 \pm 8}{2} \begin{cases} y' = \dfrac{10 + 8}{2} = \dfrac{18}{2} = 9 \\ y'' = \dfrac{10 - 8}{2} = \dfrac{2}{2} = 1 \end{cases}$$

Como $x^2 = y$, temos:

- $x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm \sqrt{9} \Rightarrow x = \pm 3$
- $x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm \sqrt{1} \Rightarrow x = \pm 1$

Logo: $V = \{ +3, -3, +1, -1 \}$

2 Resolver a equação: $x^4 + 5x^2 - 36 = 0$

Solução

$(x^2)^2 + 5x^2 - 36 = 0$

Fazendo $x^2 = y$, vem: $y^2 + 5y - 36 = 0$

Temos: $\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$

$a = 1$ — $\Delta = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-36)$

$b = 5$ — $\Delta = 25 + 144$

$c = -36$ — $\Delta = 169$

Substituindo na fórmula:

$$\boxed{y = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}}$$

$$y = \frac{-5 \pm \sqrt{169}}{2 \cdot 1} = \frac{-5 \pm 13}{2}$$

$$y' = \frac{-5 + 13}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$y'' = \frac{-5 - 13}{2} = \frac{-18}{2} = -9$$

Como $x^2 = y$, temos:

- $x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{4} \Rightarrow x = \pm 2$
- $x^2 = -9 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-9} \notin \mathbb{R}$

Logo: $V = \{+2, -2\}$

EXERCÍCIOS

1) Resolva as equações biquadradas em $\mathbb{R}$:

a) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ $V = \{1, -1, 2, -2\}$

b) $x^4 + 2x^2 + 7 = 0$ $V = \varnothing$

c) $2x^4 - x^2 - 15 = 0$ $V = \{\sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$

d) $8x^4 + 7x^2 + 5 = 0$ $V = \varnothing$

e) $4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$ $V = \left\{1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\}$

f) $2x^4 - 3x^2 - 20 = 0$ $V = \{2, -2\}$

g) $x^4 + 3x^2 = 4$ $V = \{1, -1\}$

h) $5x^4 = 3x^2 - 8$ $V = \varnothing$

i) $x^4 + 4 = -5x^2$ $V = \varnothing$

j) $4x^4 + 4 = 17x^2$ $V = \left\{2, -2, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\}$

l) $x^4 - 25x^2 = 0$ $V = \{5, -5, 0\}$

m) $x^4 - 9 = 0$ $V = \{\sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$

2) Resolva as equações biquadradas em IR:

a) $(x^2 + 1)^2 + 50 = 15(x^2 + 1)$ $V = \{3, -3, 2, -2\}$

b) $(2x^2 - 5)^2 = 10(2x^2 - 5) + 39$ $V = \{3, -3, 1, -1\}$

c) $(x^2 + 3)^2 - 19(x^2 + 3) + 84 = 0$ $V = \{2, -2, 3, -3\}$

3) Resolva as equações biquadradas em IR:

a) $x^4 - \frac{9}{4}x^2 + \frac{1}{2} = 0$

$V = \left\{\sqrt{2}, -\sqrt{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\}$

b) $x^4 = \frac{7}{3}x^2 - \frac{2}{3}$

$V = \left\{\sqrt{2}, -\sqrt{2}, \sqrt{\frac{1}{3}}, -\sqrt{\frac{1}{3}}\right\}$

c) $x^2 + \frac{1}{x^2} = 2 \quad (x \neq 0)$

$V = \{1, -1\}$

d) $\frac{1}{x^4} - \frac{5}{x^2} + 4 = 0 \quad (x \neq 0)$

$V = \left\{1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\}$

4) Resolva as equações biquadradas em IR:

a) $\frac{3 + 2x^2}{2} - \frac{x^4 - 3}{4} = x^2$ $V = \{\sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$

b) $x^4 - \frac{x^2 + 1}{3} = \frac{3x^2 + 1}{12}$ $V = \{1, -1\}$

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1) (FAAP-SP) Em IR, resolver $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$.

$V = \{2, -2\}$

2) (CESGRANRIO-RJ) Em IR, resolver $x^4 - 20x^2 + 36 = 0$.

$V = \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, -3\sqrt{2}\}$

3) Resolva as equações biquadradas em IR:

a) $(x^2 + 6)^2 - 17(x^2 + 6) + 70 = 0$ $V = \{2, -2, 1, -1\}$

b) $(x^2 + 5)^2 - 20(x^2 + 5) + 84 = 0$ $V = \{1, -1, 3, -3\}$

c) $(2x^2 - 5)^2 = 39 + 10(2x^2 - 5)$ $V = \{3, -3, 1, -1\}$

d) $x^2(x^2 - 10) + 9 = (x + 1)(x - 1)$ $V = \{\sqrt{10}, -\sqrt{10}, 1, -1\}$

4) Resolva as equações biquadradas em IR:

a) $\frac{1}{x^4} = \frac{6}{x^2} - 8 \quad (x \neq 0)$ $V = \left\{\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\}$

b) $x^2 = 2 + \frac{6}{x^2 - 1} \quad (x \neq 1, x \neq -1)$ $V = \{2, -2\}$

TESTES

1) (OSEC-SP) O número de raízes reais da equação $5x^4 + x^2 - 3 = 0$ é:

a) 1
■ b) 2
c) 3
d) 4

2) O número de raízes distintas da equação $x^2 (x^2 - 16) = 0$ é:

a) 0
b) 2
■ c) 3
d) 4

3) (FAAP-SP) O conjunto solução da equação $q^4 - 13q^2 + 36 = 0$ é:

a) $\{2, 3\}$
b) $\{0, 2, 3\}$
c) $\{-3, -2\}$
■ d) $\{-3, -2, 2, 3\}$

4) A soma das raízes reais da equação $x^4 - 17x^2 + 16 = 0$ é:

■ a) 0
b) 10
c) 16
d) 17

5) No conjunto IR, o conjunto verdade da equação $x^4 = 11x^2 - 18$ é:

a) $\{9, -9, 2, -2\}$
b) $\{3, -3, 2, -2\}$
■ c) $\{3, -3, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$
d) $\{\sqrt{3}, -\sqrt{3}, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$

6) No conjunto IR, o conjunto verdade da equação $(x^2 - 6)^2 = x^2$ é:

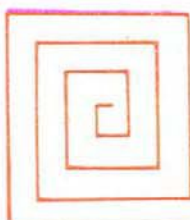
a) $\{4, -4, 9, -9\}$
■ b) $\{2, -2, 3, -3\}$
c) $\{2, -2, 9, -9\}$
d) $\{4, -4, 3, -3\}$

7) No conjunto IR*, a equação $x^2 + \dfrac{3}{x^2} = 4$:

■ a) tem 4 raízes reais distintas.
b) tem 4 raízes reais positivas.
c) tem 2 raízes reais.
d) não tem raízes reais.

8) No conjunto IR, o conjunto verdade da equação $\dfrac{x^2 + 1}{4} + \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{3}{2}$ é:

a) $\{4, -4, 1, -1\}$
■ b) $\{2, -2, 1, -1\}$
c) $\{2, -2\}$
d) $\{4, -4, 2, -2\}$

8

EQUAÇÕES IRRACIONAIS

DEFINIÇÃO

Chama-se equação irracional a equação cuja incógnita está sob radical.

Exemplos:

a) $\sqrt{x+2} = 5$

b) $\sqrt{3x-1} = x - 4$

c) $\sqrt[3]{x} - 6 = 10$

d) $3\sqrt{x} - 4 = 5$

EXERCÍCIOS

Quais são as equações irracionais?

■ a) $\sqrt{x+1} = 9$

■ b) $\sqrt{2x-1} = x - 3$

■ c) $\sqrt{x} + 5 = 8$

d) $x + \sqrt{3} = 2$

■ e) $\sqrt{x} - 2 = x + 1$

■ f) $\sqrt{3x-1} = \sqrt{2x+4}$

g) $x + \sqrt{2}\,x = 5$

■ h) $\sqrt{3x} = 5x - 1$

i) $7x - \sqrt{5} = x - 1$

j) $\sqrt{3}\,x^2 - 1 = x$

RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES IRRACIONAIS

Na resolução de equações irracionais em IR, procedemos do seguinte modo:

1º) Isolamos um dos radicais em um dos membros da equação dada.

2º) Elevamos os dois membros da equação a um expoente adequado.

3º) Se ainda restar um ou mais radicais, repetimos as operações anteriores.

4º) Verificar as soluções encontradas.

RAÍZES ESTRANHAS

Quando se elevam os dois membros de uma equação a um mesmo expoente par, a equação obtida tem, em geral, raízes estranhas à equação original.

Veja:

- A equação $x = 5$ tem como conjunto verdade $V = \{5\}$.
- Elevando ambos os membros ao quadrado, vamos ter:

$$x^2 = 25$$

cujo conjunto verdade é $V = \{5, -5\}$.

Concluindo:

Na resolução de uma equação irracional com radical de índice par, devemos fazer uma verificação da validade das raízes encontradas na equação original e eliminar as raízes estranhas.

Mostraremos a resolução de equações irracionais no conjunto IR.

Exemplo 1

Resolver: $\sqrt{x + 4} - 3 = 0$

Solução:

$$\sqrt{x+4} = 3$$

- Isolando o radical.

$$(\sqrt{x+4})^2 = 3^2$$

- Elevando os membros ao quadrado.

$$x + 4 = 9$$

$$x = 9 - 4$$

$$x = 5$$

Verificação:

$$\sqrt{5+4} - 3 = 0$$

$$\sqrt{9} - 3 = 0$$

$$3 - 3 = 0$$

$$0 = 0 \text{ (verdadeira)}$$

Logo: $V = \{5\}$

Exemplo 2

Resolver: $\sqrt{x + 5} = x - 1$

Solução:

Elevando ambos os membros ao quadrado:

$$(\sqrt{x+5})^2 = (x-1)^2$$
$$x + 5 = x^2 - 2x + 1$$
$$x^2 - 3x - 4 = 0$$

Temos: $\Delta = (-3)^2 - 4 . 1 . (-4)$

$\Delta = 9 + 16$

$\Delta = 25$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2}$$

$$x' = \frac{3+5}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$x'' = \frac{3-5}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

Verificação:

a) Para $x = 4 \Rightarrow \sqrt{4 + 5} = 4 - 1$

$\sqrt{9} = 3$

$3 = 3$ (verdadeira)

b) Para $x = -1 \Rightarrow \sqrt{-1 + 5} = -1 - 1$

$\sqrt{4} = -2$

$2 = -2$ (falsa)

Logo: $V = \{ 4 \}$

EXERCÍCIOS

1) Resolva as equações irracionais em $\mathbb{R}$:

a) $\sqrt{x+1} = 7$ $V = \{48\}$

b) $\sqrt{7+x} = 3$ $V = \{2\}$

c) $\sqrt{2x-4} = 6$ $V = \{20\}$

d) $\sqrt[3]{x+2} = 2$ $V = \{6\}$

e) $\sqrt[3]{11x+26} = 5$ $V = \{9\}$

f) $\sqrt[4]{x-3} = 2$ $V = \{19\}$

g) $\sqrt{2x+5} - 1 = 0$ $V = \{-2\}$

h) $\sqrt{x+1} - 2 = 0$ $V = \{3\}$

i) $2 + \sqrt{x+4} = 5$ $V = \{5\}$

j) $\sqrt{3+x} = \sqrt{9-x}$ $V = \{3\}$

l) $\sqrt{5x-10} = \sqrt{8+3x}$ $V = \{9\}$

m) $\sqrt{2x-3} - \sqrt{x+11} = 0$ $V = \{14\}$

2) Resolva as equações irracionais em $\mathbb{R}$:

a) $\sqrt[3]{x^2-7x} = 2$ $V = \{8, -1\}$

b) $\sqrt[4]{x^2+x+4} = 2$ $V = \{-4, 3\}$

c) $\sqrt{x^2-3x+5} = \sqrt{2x-1}$ $V = \{2, 3\}$

d) $\sqrt{x^2+4x+1} - \sqrt{x^2+17} = 0$ $V = \{4\}$

3) Resolva as equações irracionais em $\mathbb{R}$:

a) $\sqrt{x} = 2 - x$ $V = \{1\}$

b) $x = \sqrt{6x-8}$ $V = \{2, 4\}$

c) $\sqrt{x^2+3x} - 2 = 0$ $V = \{-4, 1\}$

d) $2x = \sqrt{9x-2}$ $V = \left\{2, \frac{1}{4}\right\}$

e) $\sqrt{x-3} = x - 5$ $V = \{7\}$

f) $\sqrt{x} + x = 2$ $V = \{1\}$

g) $x - 3 = 2\sqrt{x}$ $V = \{9\}$

h) $2\sqrt{x-1} = x - 1$ $V = \{1, 5\}$

i) $2x = \sqrt{2x+5} + 1$ $V = \{2\}$

j) $\sqrt{\frac{x}{2} - 1} - 3 = 0$ $V = \{20\}$

Exemplo 3

Resolver: $\sqrt{7+\sqrt{x+1}} = 3$

- Elevando os membros ao quadrado. $(\sqrt{7+\sqrt{x+1}})^2 = 3^2$
- Isolando o radical. $7+\sqrt{x+1} = 9$

$\sqrt{x+1} = 9-7$

- Elevando os membros ao quadrado. $\sqrt{x+1} = 2$

$(\sqrt{x+1})^2 = 2^2$

$x+1 = 4$

$x = 3$

Verificação:

$\sqrt{7+\sqrt{3+1}} = 3$

$\sqrt{7+\sqrt{4}} = 3$

$\sqrt{7+2} = 3$

$\sqrt{9} = 3$

$3 = 3$ (verdadeira)

Logo: $V = \{3\}$

EXERCÍCIOS

Resolva as equações irracionais em IR:

1) $\sqrt{\sqrt{x-4}} = 2$ $V = \{20\}$

2) $\sqrt{\sqrt{3x+1}} = 2$ $V = \{5\}$

3) $\sqrt[3]{\sqrt{3x+1}} = 2$ $V = \{21\}$

4) $\sqrt{\sqrt{x-4}} - 2 = 0$ $V = \{20\}$

5) $\sqrt{2+\sqrt{x}} = \sqrt{7}$ $V = \{25\}$

6) $\sqrt{5+\sqrt{x+1}} = 3$ $V = \{15\}$

7) $\sqrt{x-\sqrt{x+2}} = 2$ $V = \{7\}$

8) $\sqrt{5+\sqrt{x}} = \sqrt{\sqrt{400}}$ $V = \{225\}$

Exemplo 4

Resolver: $\sqrt{x-7} = \sqrt{x+1} - 2$

Solução:

$(\sqrt{x-7})^2 = (\sqrt{x+1} - 2)^2$ • Elevando os membros ao quadrado.

$x - 7 = x + 1 - 4\sqrt{x+1} + 4$

$4\sqrt{x+1} = 12$ • Isolando o radical.

$(4\sqrt{x+1})^2 = 12^2$ • Elevando os membros ao quadrado.

$16(x+1) = 144$

$16x + 16 = 144$

$16x = 144 - 16$

$16x = 128$

$x = 8$

Verificação:

$\sqrt{8-7} = \sqrt{8+1} - 2$

$\sqrt{1} = \sqrt{9} - 2$

$1 = 3 - 2$

$1 = 1$ (verdadeira) Logo: $V = \{8\}$

EXERCÍCIOS

Resolva as equações irracionais em $\mathbb{R}$:

1) $\sqrt{x-6} + 3 = \sqrt{x+9}$ $V = \{7\}$

2) $\sqrt{2x+1} = \sqrt{x} + 1$ $V = \{0, 4\}$

3) $\sqrt{3x+3} = 2 + \sqrt{x-1}$ $V = \{2\}$

4) $\sqrt{3x+1} - \sqrt{x+4} = 1$ $V = \{5\}$

5) $\sqrt{x+3} + \sqrt{x} = 2$ $V = \left\{\frac{1}{16}\right\}$

6) $\sqrt{2x+3} - \sqrt{x+1} = 1$ $V = \{3, -1\}$

7) $\sqrt{2x+28} = \sqrt{21+x} + 1$ $V = \{4\}$

8) $\sqrt{x+4} - \sqrt{2x+1} + 1 = 0$ $V = \{12\}$

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1) (FEI-SP) Resolver a equação $x - \sqrt{9} = 0$. $V = \{3\}$

2) Resolva as equações irracionais em IR:

a) $\sqrt{3x + 1} = 7$ $V = \{16\}$

b) $\sqrt{x^2 + 5} = 3$ $V = \{2, -2\}$

c) $x = \sqrt{4x + 5}$ $V = \{5\}$

d) $\sqrt{2x - 5} - 3 = 0$ $V = \{7\}$

e) $\sqrt{7x - 1} = \sqrt{5x + 1}$ $V = \{1\}$

f) $x - \sqrt{5x} = 0$ $V = \{0, 5\}$

g) $\sqrt{1 + 2x} - 4 = -1$ $V = \{4\}$

h) $\sqrt{4x - 5} = 3\sqrt{7}$ $V = \{17\}$

i) $3x = \sqrt{10 - 2x} + 7$ $V = \{3\}$

j) $\sqrt{\frac{x}{4} + 1} - 6 = 0$ $V = \{140\}$

3) Resolva as equações irracionais em IR:

a) $\sqrt{5x^2 - 1} = \sqrt{3x + 1}$ $V = \{1\}$

b) $\sqrt{x - 3} = x - 5$ $V = \{7\}$

c) $x - 1 = \sqrt{x + 1}$ $V = \{3\}$

d) $\sqrt{3x + 16} = 2 + x$ $V = \{3\}$

e) $\sqrt{5 + \sqrt{x + 12}} = 3$ $V = \{4\}$

f) $\sqrt{(x + 8)(x + 3)} = 6$ $V = \{1, -12\}$

g) $\sqrt{x - \sqrt{x - 1}} = \sqrt{3}$ $V = \{5\}$

h) $\sqrt{x + 2} - \sqrt{x - 3} = 1$ $V = \{7\}$

4) (MAPOFEI-SP) Resolver a equação $\sqrt{4x + 5} - x = 0$. $V = \{5\}$

5) (CESGRANRIO-RJ) Resolver $x + \sqrt{2x^2 + x - 2} = 0$. $V = \{-2\}$

6) (FAAP-SP) Resolver $\sqrt{x} + \sqrt{x + 12} = 6$. $V = \{4\}$

7) (MED-ABC-SP) Resolver $\sqrt{2x} = 1 + \sqrt{x + 7}$. $V = \{18\}$

8) (ITA-SP) Resolver $\sqrt{x} + 1 = \sqrt{x - 1}$. $V = \varnothing$

9) (MAPOFEI-SP) Resolver $2 - x = \sqrt{x^2 - 12}$. $V = \varnothing$

TESTES

1) O conjunto verdade da equação $\sqrt{x + 10} - \sqrt{2x - 5} = 0$ em $\mathbb{R}$ é:

a) $\varnothing$
b) { 1 }
c) { 5 }
■ d) { 15 }

2) O conjunto verdade da equação $2\sqrt{x} + x = 2x$ em $\mathbb{R}$ é:

a) $\varnothing$
b) { 0 }
c) { 4 }
■ d) { 0, 4}

3) A equação $\sqrt{(x - 1)(x - 3)} = 0$, no conjunto $\mathbb{R}$, tem:

■ a) duas raízes positivas.
b) duas raízes negativas.
c) apenas uma raiz positiva.
d) apenas uma raiz negativa.

4) O conjunto verdade da equação $\sqrt{x^2 - 3x - 3} = \sqrt{3x + 4}$ em IR é:

a) { – 1 }
b) { 7 }
■ c) { 7, – 1 }
d) ∅

5) A soma das raízes da equação $x + 2 = 2\sqrt{3x - 2}$ é:

a) 6
b) 7
■ c) 8
d) 9

6) O conjunto verdade da equação $\sqrt{2x^2 - 2x + 1} = 2x - 3$ em IR é:

a) ∅
■ b) { 4 }
c) { 1 }
d) { 1, 4}

7) (PUC-SP) O conjunto verdade da equação $\sqrt{x + 1} = 2x - 1$ é:

a) { 2 }

b) { 0 }

c) { 0, 2 }

■ d) n.d.a.

8) (PUC-SP) A solução da equação $x - \sqrt{2x + 2} = 3$ é:

a) 1
b) 2
c) 3
■ d) 7

$(x - 3)^2 = (\sqrt{2x + 2})^2$

$x^2 - 8x + 7 = 0$ → $x = 7$; $x = 1$ (não é solução).

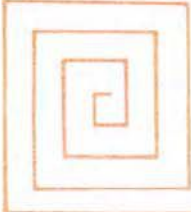
9) (PUC-SP) O conjunto verdade da equação $\sqrt{x - 1 + \sqrt{2x - 2}} = 2$ é:

a) { 9 }
b) { 4 }
■ c) { 3 }
d) { 3, 9}

$x - 1 + \sqrt{2x - 2} = 4$

$(\sqrt{2x - 2})^2 = (5 - x)^2$

$x^2 - 12x + 27 = 0$ → $x = 3$; $x = 9$ (não é solução).

9

PROBLEMAS DO 2º GRAU

INTRODUÇÃO

Um problema é chamado do 2º grau quando pode ser resolvido por meio de uma equação do 2º grau.

RESOLUÇÃO

Na resolução de um problema do 2º grau, você deve proceder do seguinte modo:

1º) Tradução das sentenças do problema para a linguagem simbólica.
2º) Resolução da equação.
3º) Interpretação das raízes obtidas.

Exemplos:

1. A soma de um número com o seu quadrado é 72. Calcular esse número.

Solução:

- **Número procurado:** x
- **Equação:** $x + x^2 = 72$
- **Resolução:** $x^2 + x - 72 = 0$

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-72)$$
$$\Delta = 1 + 288$$
$$\Delta = 289$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{289}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm 17}{2}$$

$$x' = \frac{16}{2} = 8$$

$$x'' = \frac{-18}{2} = -9$$

Resposta: O número é 8 ou -9.

2 A diferença entre o quadrado e o tríplo de um mesmo número é 10. Calcular esse número.

Solução:

- **Número procurado:** x
- **Equação:** $x^2 - 3x = 10$
- **Resolução:** $x^2 - 3x - 10 = 0$

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10)$$
$$\Delta = 9 + 40$$
$$\Delta = 49$$

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 7}{2} \begin{cases} x' = \dfrac{10}{2} = 5 \\ x'' = \dfrac{-4}{2} = -2 \end{cases}$$

Resposta: O número é 5 ou – 2.

3 A soma dos quadrados de dois números positivos e consecutivos é 25. Calcular esses números.

Solução:

- **Números procurados:** x e x + 1
- **Equação:** $x^2 + (x + 1)^2 = 25$
- **Resolução:** $x^2 + x^2 + 2x + 1 = 25$

$$2x^2 + 2x - 24 = 0$$
$$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-24)$$
$$\Delta = 4 + 192$$
$$\Delta = 196$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{196}}{2 \cdot 2} = \frac{-2 \pm 14}{4} \begin{cases} x' = \dfrac{12}{4} = 3 \\ x'' = \dfrac{-16}{4} = -4 \end{cases}$$

Observe que – 4 não serve como resposta, pois, pelo enunciado do problema, os números devem ser positivos.

Então:

Para x = 3, temos x + 1 = 3 + 1 = 4.

Resposta: Os números são 3 e 4.

EXERCÍCIOS

Resolva os seguintes problemas do 2º grau:

1) A soma de um número com o seu quadrado é 90. Calcule esse número.
Equação: $x + x^2 = 90$ *Resp.:* 9 ou – 10.

2) A soma do quadrado de um número com o próprio número é 12. Calcule esse número.
Equação: $x^2 + x = 12$ *Resp.:* 3 ou – 4.

3) O quadrado menos o dobro de um número é igual a – 1. Calcule esse número.
Equação: $x^2 - 2x = -1$ *Resp.:* 1.

4) A diferença entre o quadrado e o dobro de um mesmo número é 80. Calcule esse número.
Equação: $x^2 - 2x = 80$ *Resp.:* 10 ou – 8.

5) O quadrado de um número aumentado de 25 é igual a dez vezes esse número. Calcule esse número.
Equação: $x^2 + 25 = 10x$ *Resp.:* 5.

6) A soma do quadrado de um número com o seu triplo é igual a 7 vezes esse número. Calcule esse número.
Equação: $x^2 + 3x = 7x$ *Resp.:* 0 ou 4.

7) O quadrado menos o quádruplo de um número é igual a 5. Calcule esse número.
Equação: $x^2 - 4x = 5$ *Resp.:* 5 ou – 1.

8) O quadrado de um número é igual ao produto desse número por 3, mais 18. Qual é esse número?
Equação: $x^2 = 3x + 18$ *Resp.:* 6 ou – 3.

9) O dobro do quadrado de um número é igual ao produto desse número por 7, menos 3. Qual é esse número?
Equação: $2x^2 = 7x - 3$ *Resp.:* 3 ou $\frac{1}{2}$.

10) O quadrado de um número menos o triplo do seu sucessivo é igual a 15. Qual é esse número?
Equação: $x^2 - 3(x + 1) = 15$ *Resp.:* 6 ou – 3.

11) O produto de um número positivo pela sua quarta parte é igual a 25. Calcule esse número.
Equação: $x \cdot \frac{x}{4} = 25$ *Resp.:* 10.

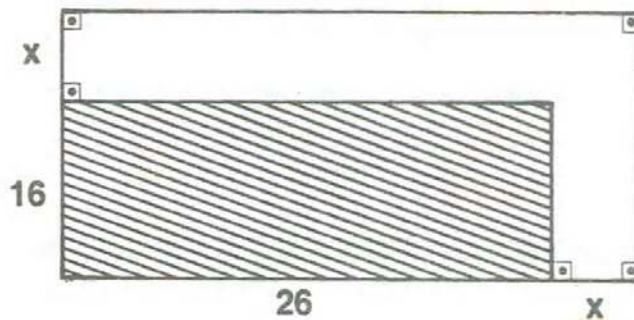
12) O quadrado da idade de Vânia subtraído da metade de sua idade é igual a 14 anos. Calcule a idade de Vânia.
Equação: $x^2 - \frac{x}{2} = 14$ *Resp.:* 4.

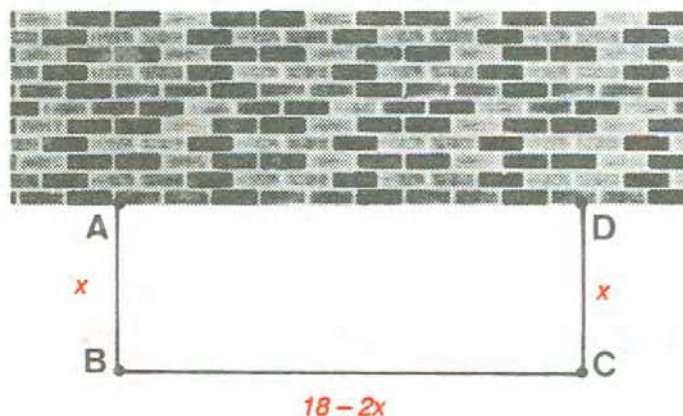
13) (FUVEST-SP) Subtraindo-se 3 de um certo número, obtém-se o dobro da sua raiz quadrada. Qual é esse número?

Equação: $x - 3 = 2\sqrt{x}$ *Resp.: 9.*

14) (FAAP-SP) Determine dois números pares positivos e consecutivos cujo produto é 624.

Equação: $x(x + 2) = 624$ *Resp.: 24 e 26.*

15) Um senhor tem um terreno que mede 26 m de comprimento e 16 m de largura. Ele deseja aumentar a sua área para 816 m^2, acrescentando faixas de mesma largura a um dos lados e aos fundos (veja figura).

Qual deve ser a largura dessas faixas? *Resp.: 8.*

16) Uma parede de tijolos será usada como um dos lados de um canil retangular, com 40 m^2 de área. Para cercar os outros três lados, iremos usar uma tela de arame com 18 m de comprimento que será dividida em três pedaços (veja figura).

Quanto deverá medir cada um dos três pedaços da tela?

Resp.: 5 m, 5 m e 8 m ou 4 m, 4 m e 10 m.

17) A soma de um número com o seu inverso é $\frac{17}{4}$. Qual é esse número?

Equação: $x + \frac{1}{x} = \frac{17}{4}$ *Resp.: 4 ou* $\frac{1}{4}$.

18) Determine dois números naturais consecutivos tais que a soma de seus inversos seja $\frac{7}{12}$.

Equação: $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} = \frac{7}{12}$ *Resp.: 3 e 4.*

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

Resolva os seguintes problemas do 2º grau:

1) Qual é o número cujo quadrado mais seu triplo é igual a 40?

Equação: $x^2 + 3x = 40$ *Resp.: 5 ou − 8.*

2) O quadrado de um número diminuído de 15 é igual ao seu dobro. Calcule esse número.

Equação: $x^2 - 15 = 2x$ *Resp.: 5 ou − 3.*

3) Determine um número tal que seu quadrado diminuído do seu triplo é igual a 28.

Equação: $x^2 - 3x = 28$ *Resp.: 7 ou − 4.*

4) Se do quadrado de um número negativo subtrairmos 7, o resto será 42. Qual é esse número?

Equação: $x^2 - 7 = 42$ *Resp.: − 7.*

5) Perguntada sobre sua idade, Carolina respondeu: "O quadrado de minha idade menos o quíntuplo dela é igual a 84." Qual é a idade de Carolina?

Equação: $x^2 - 5x = 84$ *Resp.: 12 anos.*

6) A diferença entre o dobro do quadrado de um número positivo e o triplo desse número é 77. Calcule o número.

Equação: $2x^2 - 3x = 77$ *Resp.: 7.*

7) Determine dois números ímpares consecutivos cujo produto seja 143.

Equação: $x(x+2) = 143$ *Resp.: 11 e 13 ou − 13 e − 11.*

8) A soma de um número com o seu inverso é $\frac{10}{3}$. Qual é esse número?

Equação: $x + \frac{1}{x} = \frac{10}{3}$ *Resp.: 3 ou* $\frac{1}{3}$.

9) Determine dois números inteiros consecutivos tal que a soma de seus quadrados seja igual a 41.

Equação: $x^2 + (x+1)^2 = 41$ *Resp.: 4 e 5 ou − 5 e − 4.*

10) A soma dos quadrados de três números positivos consecutivos é 110. Determine esses números.

Equação: $x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2 = 110$ *Resp.: 5, 6 e 7.*

TESTES

1) O quadrado da quantia que Carlos possui, aumentado do dobro da mesma quantia é igual a R$ 35,00. Podemos dizer que Carlos possui:

a) R$ 4,00
■ b) R$ 5,00
c) R$ 6,00
d) R$ 7,00

$x^2 + 2x = 35$

$\begin{cases} x' = 5 \\ x'' = -7 \text{ (não convém)} \end{cases}$

2) A soma de um número positivo com seu quadrado é 132. Podemos dizer que esse número é:

■ a) 11
b) 12
c) 13
d) 14

$x + x^2 = 132$

$x^2 + x - 132 = 0$

$\begin{cases} x' = 11 \\ x'' = -12 \text{ (não convém)} \end{cases}$

3) O quadrado menos o quádruplo da idade de Carolina é igual a 32 anos. Pode-se dizer que Carolina tem:

a) 4 anos
b) 5 anos
c) 6 anos
■ d) 8 anos

$x^2 - 4x = 32$

$x^2 - 4x - 32 = 0$

$\begin{cases} x' = 8 \\ x'' = -4 \text{ (não convém)} \end{cases}$

4) Subtraindo-se 4 de um certo número, obtém-se o triplo da sua raiz quadrada. Então esse número é igual a:

a) 1
b) 4
c) 9
■ d) 16

$x - 4 = 3\sqrt{x}$

$x^2 - 17x + 16 = 0$

$\begin{cases} x' = 16 \\ x'' = 1 \text{ (não é solução da equação)} \end{cases}$

5) Um garoto disse: "O quadrado da minha idade menos o sêxtuplo dela é igual a 16 anos". Qual a idade desse garoto?

a) 6 anos
■ b) 8 anos
c) 10 anos
d) 12 anos

$x^2 - 6x = 16$

$x^2 - 6x - 16 = 0$

$\begin{cases} x' = 8 \\ x'' = -2 \text{ (não convém)} \end{cases}$

6) (CESGRANRIO-RJ) Se x é positivo e se o inverso de x + 1 é x – 1, então x é:

a) 2
b) 3
■ c) $\sqrt{2}$
d) $\sqrt{3}$

$\frac{1}{x+1} = x - 1 \Rightarrow x^2 - 1 = 1$

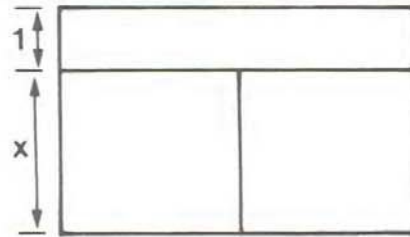
$\begin{cases} x = \sqrt{2} \\ x = -\sqrt{2} \text{ (não é solução do problema)} \end{cases}$

7) A figura mostra duas salas quadradas e um corredor retangular que têm, juntos, 84 m^2 de área. O corredor tem 1 m de largura e cada sala tem x metros de lado. As raízes da equação que permitem calcular o valor de x são:

■ a) + 6 e − 7
b) + 7 e − 6
c) − 12 e + 7
d) + 12 e − 7

$2x(x+1) = 84$

$2x^2 + 2x - 84 = 0$

$\begin{cases} x' = 6 \\ x'' = -7 \end{cases}$

8) (PUC-SP) Considere o seguinte problema: "Achar um número que, somado com 1, seja igual ao seu inverso". Qual das equações representa este problema?

a) $x^2 - x + 1 = 0$
■ b) $x^2 + x - 1 = 0$
c) $x^2 - x - 1 = 0$
d) $x^2 + x + 2 = 0$

Seja $x \neq 0$ o número; $\frac{1}{x}$ o seu inverso.

$x + 1 = \frac{1}{x} \Rightarrow x^2 + x - 1 = 0$

9) (F. OBJETIVO-SP) O quadrado de um número natural é igual a seu dobro somado com 24. O dobro desse número menos 8 é igual a:

a) 2
b) 3
■ c) 4
d) 5

$x^2 = 2x + 24$ → $x' = 6$; $x'' = -4$ (não convém)

Então: $2 \cdot 6 - 8 = 4$

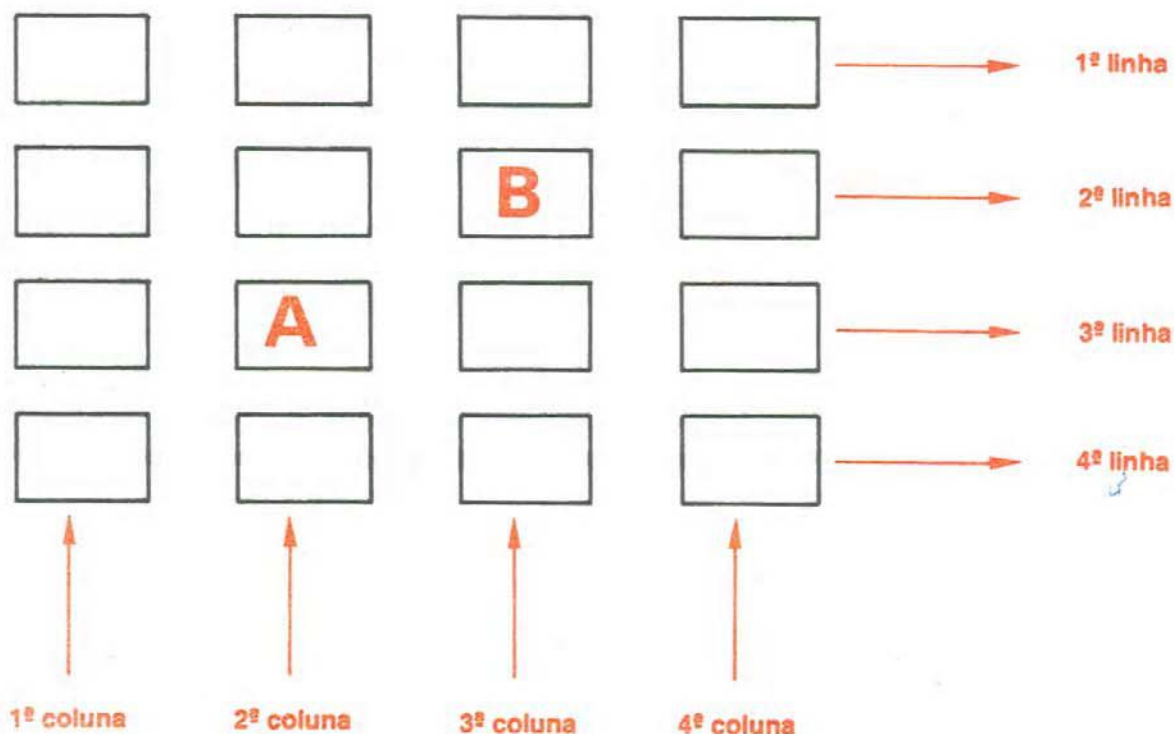
10) (PUC-SP) Um terreno retangular de área 875 m^2 tem o comprimento excedendo em 10 metros a largura. Quais são as dimensões do terreno?
Assinale a equação que representa o problema acima:

a) $x^2 + 10x + 875 = 0$
b) $x^2 + 875x - 10 = 0$
c) $x^2 - 10x + 875 = 0$
■ d) $x^2 + 10x - 875 = 0$

largura: x
comprimento: $x + 10$
$x(x + 10) = 875$
$x^2 + 10x - 875 = 0$

10 PRODUTO CARTESIANO

PAR ORDENADO

Observe a disposição dos cartões na figura abaixo:

- *O cartão A está situado na terceira linha e segunda coluna. Vamos indicar esse fato por: (3, 2).*

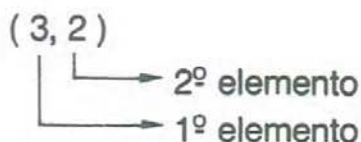
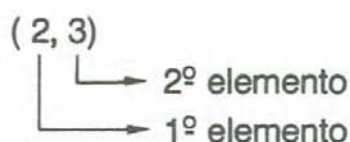
- *O cartão B está situado na segunda linha e terceira coluna. Vamos indicar esse fato por: (2, 3).*

Como os cartões ocupam lugares diferentes, é fácil perceber que:

$$(3, 2) \neq (2, 3)$$

Observe que um **par ordenado** é indicado entre parênteses e os elementos são separados por vírgula.

par ordenado:

$(3, 2)$

- 2º elemento: 2
- 1º elemento: 3

IGUALDADE DE PARES ORDENADOS

Dois pares ordenados são iguais somente se tiverem os primeiros elementos iguais entre si e também os segundos elementos iguais entre si.

Assim:

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \text{ e } b = d$$

Exemplo:

Determinar x e y de modo que os pares ordenados $(2x + 7, 5y - 9)$ e $(x + 3, 3y - 3)$ sejam iguais.

Solução:

$$(2x + 7, 5y - 9) = (x + 3, 3y - 3)$$

Então:

$$\begin{aligned} 2x + 7 &= x + 3 \\ 2x - x &= 3 - 7 \\ x &= -4 \end{aligned} \qquad \text{e} \qquad \begin{aligned} 5y - 9 &= 3y - 3 \\ 5y - 3y &= -3 + 9 \\ 2y &= 6 \\ y &= 3 \end{aligned}$$

Logo: $x = -4$ e $y = 3$

EXERCÍCIOS

1) Copie e complete com os símbolos = ou ≠ :

a) $(6, 0) \overset{\neq}{\ldots} (0, 6)$

b) $(5, -1) \overset{=}{\ldots} (5, -1)$

c) $(2, 5) \overset{=}{\ldots} \left(\frac{6}{3}, \frac{10}{2}\right)$

d) $(-3, 8) \overset{\neq}{\ldots} (8, -3)$

e) $(-4, -2) \overset{\neq}{\ldots} (-2, -4)$

f) $(-1, 2) \overset{\neq}{\ldots} \left(-\frac{3}{8}, \frac{8}{2}\right)$

2) Determine x e y para que cada uma das igualdades seja verdadeira:

a) $(x, y) = (8, -6)$ *8 e −6*

b) $(6, y) = (x, 0)$ *6 e 0*

c) $(x, -4) = (-3, y)$ *−3 e −4*

d) $(2x, -5) = (8, y)$ *4 e −5*

e) $(x, y + 2) = (5, 9)$ *5 e 7*

f) $(3x, 2y) = (-12, -6)$ *−4 e −3*

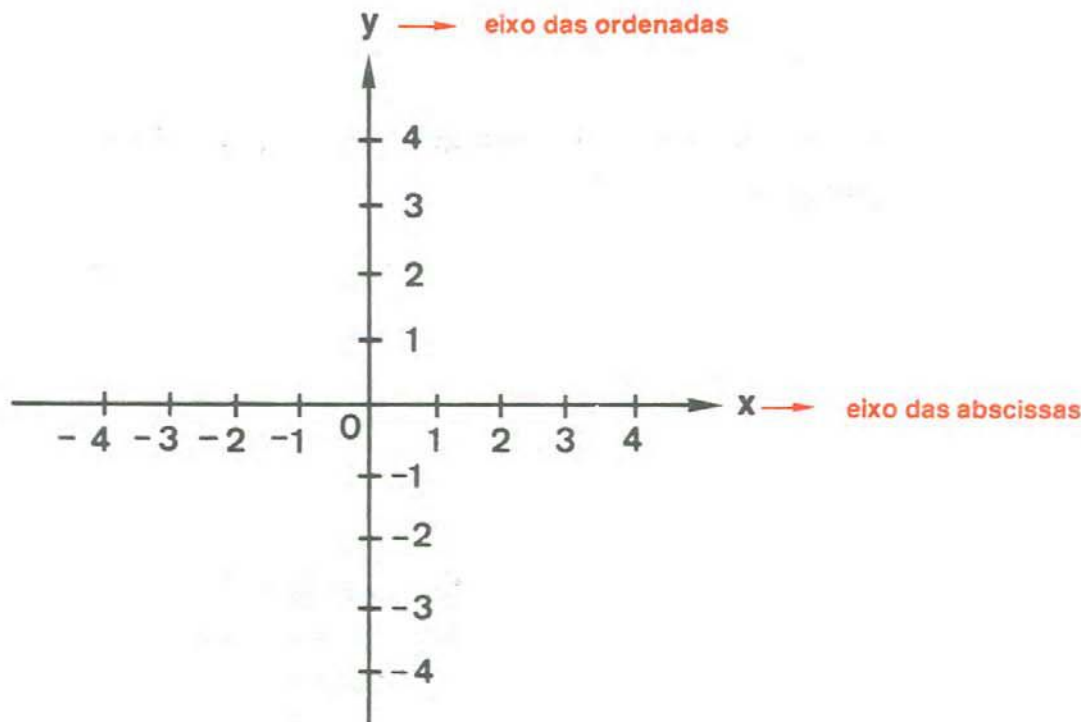
g) $(x - y, 5) = (0, y)$ *5 e 5*

h) $(x + 1, y - 1) = (3, 7)$ *2 e 8*

i) $(x - 2, 7 - y) = (-2, 6)$ *0 e 1*

j) $(3x + 2, 2y - 6) = (2x - 1, y + 2)$ *−3 e 8*

PLANO CARTESIANO

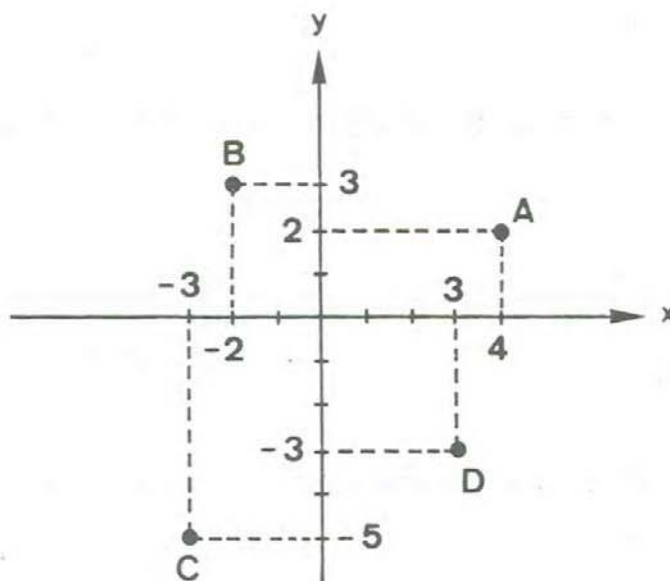
Consideremos duas retas numeradas (perpendiculares), denominadas eixos, que se interceptam no ponto zero (origem).

A representação de um ponto no plano é feita por meio de dois números reais:

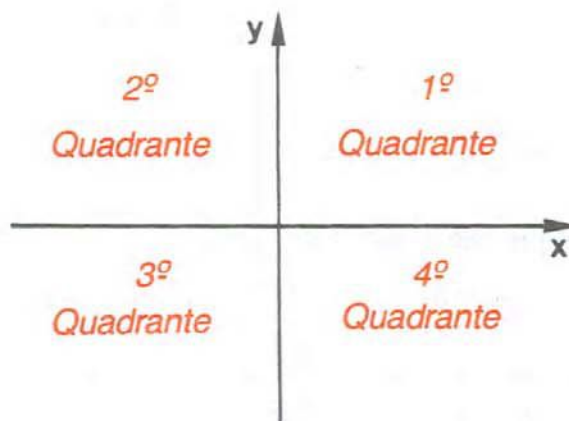
- o primeiro número do par ordenado chama-se **abscissa** do ponto.
- o segundo número do par ordenado chama-se **ordenada** do ponto.

Exemplos:

Vamos representar os seguintes pares ordenados:

- A (4, 2)

- B (− 2, 3)
- C (− 3, − 5)
- D (3, − 3)

QUADRANTES

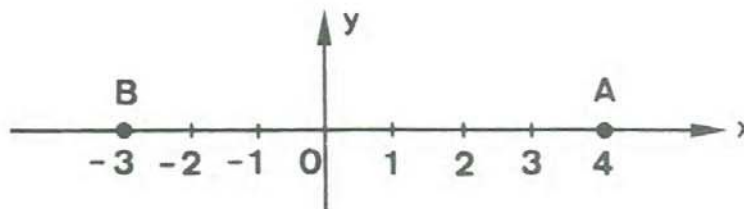
As retas x e y dividem o plano cartesiano em quatro regiões chamadas **quadrantes,** que são numeradas conforme a figura abaixo.

A seguir, indicamos os sinais das abscissas e das ordenadas em cada quadrante:

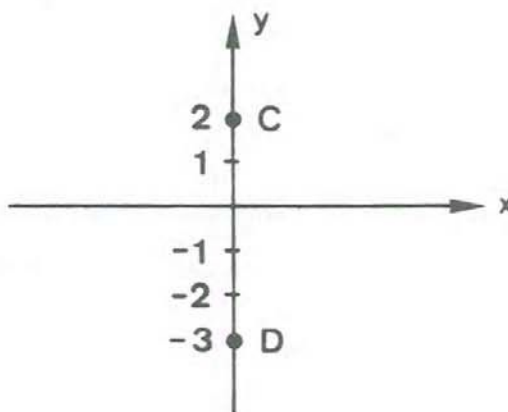
1º quadrante (+, +)
2º quadrante (−, +)
3º quadrante (−, −)
4º quadrante (+, −)

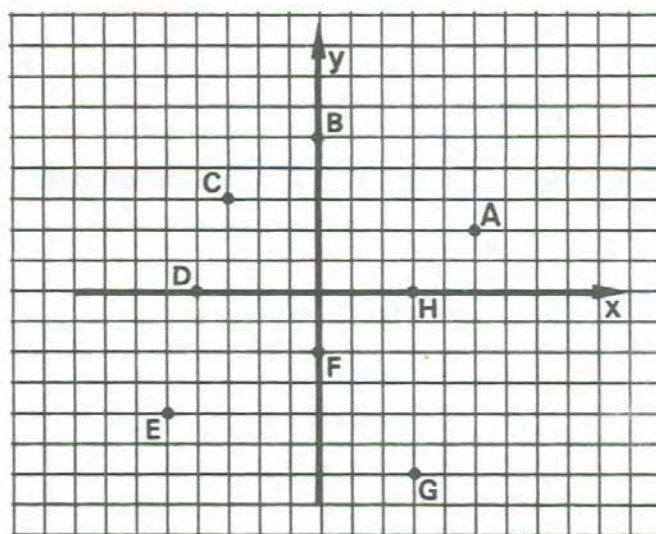
Convencionou-se que os pontos situados sobre os eixos não pertencem a nenhum dos quadrantes.

Observações:

- *Os pontos pertencentes ao eixo x têm ordenada nula. Vamos representar os pontos:*

  - A (4, 0)
  -
    B (− 3, 0)

- *Os pontos pertencentes ao eixo y têm abscissa nula. Vamos representar os pontos:*

  - C (0, 2)
  - D (0, − 3)

EXERCÍCIOS

1) Dê as coordenadas de cada ponto do plano cartesiano:

A (5, 2)
B (0, 5)
C (− 3, 3)
D (− 4, 0)
E (− 5, − 4)
F (0, − 2)
G (3, − 6)
H (3, 0)

2) Represente, no plano cartesiano, os pontos:

- A (3, 4)
- B (4, 3)
- C (− 4, 1)
- D (− 2, 5)
- E (− 3, − 4)
- F (− 2, − 1)
- G (3, − 2)
- H (4, − 1)
- I (5, 2)
- J (− 1, − 2)
- L (− 3, 1)
- M (5, − 1)

3) No exercício anterior:

a) Quais os pontos que pertencem ao 1º quadrante? *A, B, I*

b) Quais os pontos que pertencem ao 2º quadrante? *C, D, L*

c) Quais os pontos que pertencem ao 3º quadrante? *E, F, J*

d) Quais os pontos que pertencem ao 4º quadrante? *G, H, M*

4) Represente, no plano cartesiano, os pontos:

- A (5, 0)
- B (1, 0)
- C (− 3, 0)
- D (0, 4)
- E (0, 1)
- F (0, − 4)

5) No exercício anterior:

a) Quais os pontos que pertencem ao eixo x? *A, B, C*

b) Quais os pontos que pertencem ao eixo y? *D, E, F*

PRODUTO CARTESIANO

Sejam A e B dois conjuntos não vazios. Chama-se **produto cartesiano** de A e B ao conjunto de todos os pares ordenados onde o primeiro elemento pertence a A e o segundo elemento pertence a B.

Indicamos: $A \times B$ e lemos "A cartesiano B".

Exemplo:

Sendo $A = \{ 1, 2 \}$ e $B = \{ 3, 4, 5 \}$, temos:

- $A \times B = \{ (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5) \}$
- $B \times A = \{ (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (5, 1), (5, 2) \}$

Observe que, em geral: $A \times B \neq B \times A$

Ilustrando:

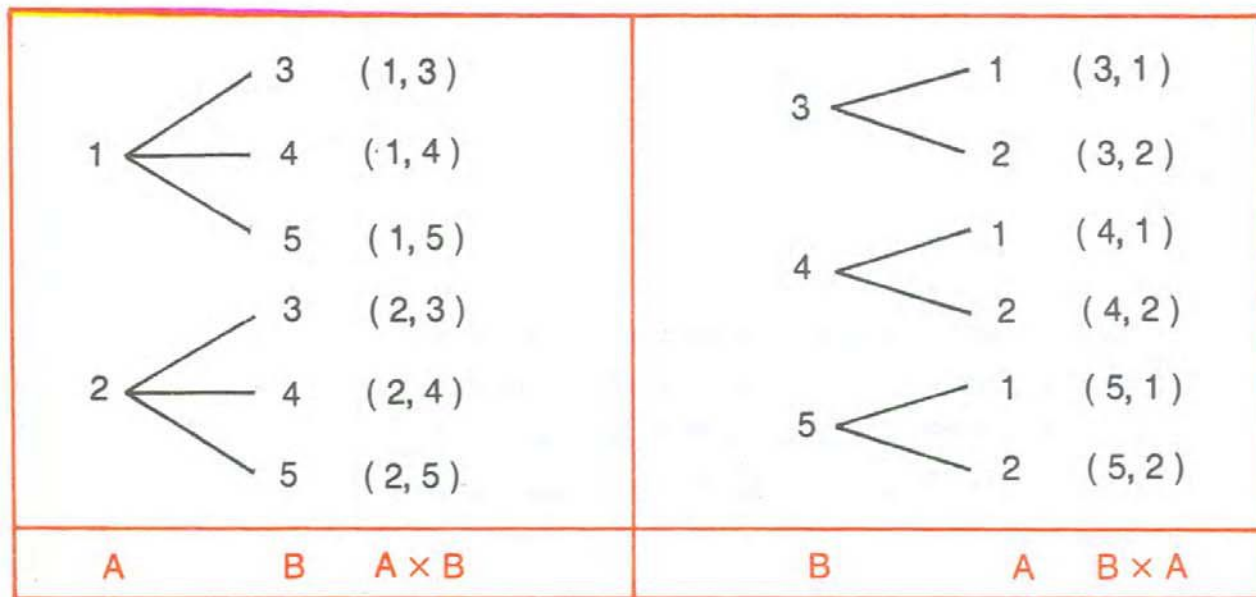
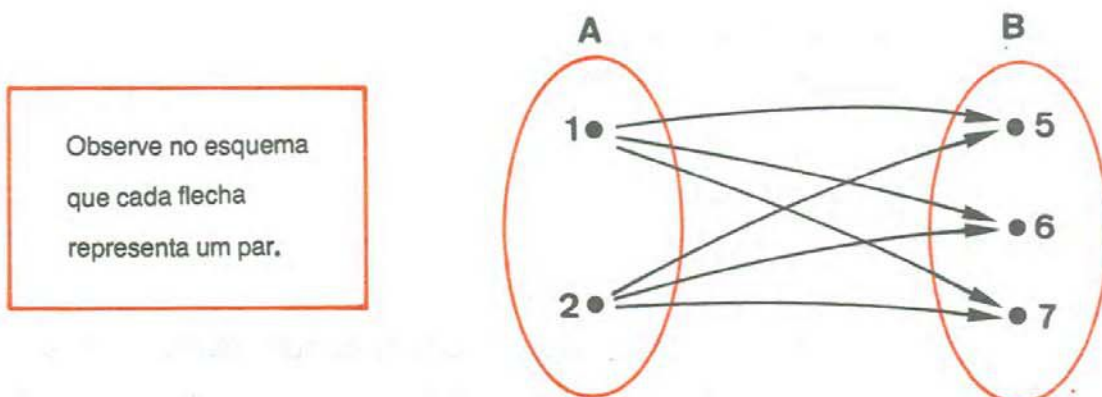



DIAGRAMA DE FLECHAS

O produto cartesiano também pode ser representado por diagramas de flechas.

Exemplo:

Dados os conjuntos A = { 1, 2 } e B = { 5, 6, 7 }

Observe no esquema que cada flecha representa um par.

Então: A × B = { (1, 5), (1, 6), (1, 7), (2, 5), (2, 6), (2, 7) }

NÚMERO DE ELEMENTOS

Observe no diagrama de flechas acima que:

- O conjunto A tem 2 elementos.
- O conjunto B tem 3 elementos.
- O número de elementos de A × B é: 2 × 3 = 6.

Conclusão:

O número de elementos de A × B é igual ao número de elementos de A vezes o número de elementos de B.

EXERCÍCIOS

1) Se $A = \{4, 6\}$, $B = \{-3\}$ e $C = \{0, -8\}$, determine:

a) $A \times C$ $\{(4, 0), (4, -8), (6, 0)(6, -8)\}$

b) $C \times A$ $\{(0, 4), (0, 6), (-8, 4), (-8, 6)\}$

c) $A \times B$ $\{(4, -3), (6, -3)\}$

d) $B \times A$ $\{(-3, 4), (-3, 6)\}$

e) $C \times B$ $\{(0, -3), (-8, -3)\}$

f) $B \times C$ $\{(-3, 0), (-3, -8)\}$

g) $A \times A$ $\{(4, 4), (4, 6), (6, 4), (6, 6)\}$

h) $B \times B$ $\{(-3, -3)\}$

2) Sendo $A = \{-1, 0, 1\}$ e $B = \{7, 9\}$, determine $A \times B$ e $B \times A$.

$A \times B = \{(-1, 7), (-1, 9), (0, 7), (0, 9), (1, 7), (1, 9)\}$

$B \times A = \{(7, -1), (7, 0), (7, 1), (9, -1), (9, 0), (9, 1)\}$

3) Se um conjunto A possui 3 elementos e um conjunto B possui 4 elementos, dê o número de elementos de cada um dos conjuntos:

a) $A \times B$ (12)

b) $B \times A$ (12)

c) $A \times A$ (9)

d) $B \times B$ (16)

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1) Determine x e y para que cada uma das igualdades seja verdadeira:

a) $(x, y) = (3, -7)$ 3 e −7

b) $(5, y) = (x, -1)$ 5 e −1

c) $(x, 2y) = (3, 8)$ 3 e 4

d) $(x, y + 1) = (4, -9)$ 4 e −10

e) $(3x, 2y) = (-15, -6)$ −5 e −3

f) $(x - 1, y - 2) = (-3, -4)$ −2 e −2

g) $(2x, xy) = (8, 12)$ 4 e 3

h) $(3x, 2y) = (2x - 1, y + 2)$ −1 e 2

2) (OSEC-SP) Os pares ordenados ($3x + y, 1$) e ($7, 2x - 3y$) são iguais. Determine x e y. $x = 2$ e $y = 1$

3) Se $A = \{-2, 0, 2\}$, $B = \{5, 6\}$ e $C = \{-4\}$, determine:

a) $A \times C$
$\{(-2, -4), (0, -4), (2, -4)\}$

b) $C \times B$
$\{(-4, 5), (-4, 6)\}$

c) $A \times B$
$\{(-2, 5), (-2, 6), (0, 5), (0, 6), (2, 5), (2, 6)\}$

d) $C \times C$ $\{(-4, -4)\}$

e) $C \times A$ $\{(-4, -2), (-4, 0), (-4, 2)\}$

f) $A \times C$ $\{(-2, -4), (0, -4), (2, -4)\}$

TESTES

1) (FMJ-SP) Qual a sentença falsa?

a) $\{a, b\} = \{b, a\}$

b) $\{a, b\} = \{a, b\}$

■ c) $(a, b) = (b, a)$

d) $(a, b) \neq (a, b)$

2) Se $(x, 2) = (5, y)$, então o valor de $x + y$ é:

a) 3

b) 4

■ c) 7

d) 10

3) (ESAN-SP) Os valores de x e y de modo que os pares ordenados $(x - 3, 2y + 1)$ e $(2x + 2, -y - 8)$ sejam iguais são:

a) $(-1, 7)$

b) $(-9, -5)$

c) $(-5, -9)$

■ d) n.d.a.

$x - 3 = 2x + 2 \Rightarrow x = -5$

$2y + 1 = -y - 8 \Rightarrow y = -3$

4) Se x é um número positivo e y é um número negativo, então a afirmativa verdadeira é:

a) (x, y) está no 1º quadrante.

b) (x, y) está no 2º quadrante.

c) (x, y) está no 3º quadrante.

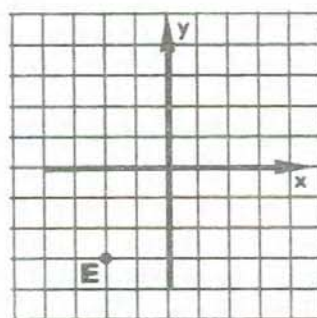
d) (x, y) está no 4º quadrante.

5) As coordenadas de E são:

a) $(-2, -3)$

b) $(-3, -2)$

c) $(-3, 2)$

d) $(+2, -3)$

6) Se $E = \{2, 4\}$ e $F = \{3, 5, 7\}$, então o par ordenado que **não** pertence ao produto $E \times F$ é:

a) $(4, 5)$

b) $(2, 3)$

c) $(4, 7)$

d) $(3, 4)$

7) Sabendo que $A = \{1\}$ e $B = \{0, 2\}$, então:

a) $A \times B = \{(0, 1), (2, 1)\}$

b) $A \times B = \{(1, 0), (1, 2)\}$

c) $B \times A = \{(1, 0), (1, 2)\}$

d) $B \times A = \{(0, 1), (1, 2)\}$

8) Se $A \times B = \{(1, 5), (1, 3), (1, 2), (7, 5), (7, 3), (7, 2)\}$, então:

■ a) $A = \{1, 7\}$ e $B = \{5, 3, 2\}$

b) $A = \{5, 3, 2\}$ e $B = \{1, 7\}$

c) $A = \{1, 5, 3\}$ e $B = \{1, 2\}$

d) $A = \{1, 2\}$ e $B = \{1, 5, 3\}$

9) (CESGRANRIO-RJ) Sendo $A = \{1, 3\}$ e $B = \{2, 4\}$, o produto cartesiano $A \times B$ é dado por:

a) $\{(1, 2), (3, 4)\}$

■ b) $\{(1, 2), (3, 2), (1, 4), (3, 4)\}$

c) $\{(1, 3), (1, 2), (1, 4), (3, 4)\}$

d) $\{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$

10) A afirmativa verdadeira é:

a) $\{1, 5\} \times \{3, 4\} = \{3, 4, 15, 20\}$

b) $\{1, 5\} \times \{3, 4\} = \{3, 4\} \times \{1, 5\}$

c) $\{1, 5\} \times \{3, 4\} = \{(1, 3), (1, 4), (3, 5), (4, 5)\}$

■ d) $\{1, 5\} \times \{3, 4\} = \{(1, 3), (1, 4), (5, 3), (5, 4)\}$

11) (CESGRANRIO-RJ) Sejam $F = \{1, 2, 3, 4\}$ e $G = \{3, 4, 7\}$. Então:

■ a) $F \times G$ tem 12 elementos.

b) $G \times F$ tem 9 elementos.

c) $F \cup G$ tem 7 elementos.

d) $F \cap G$ tem 3 elementos.

12) (UF-MT) Sejam os conjuntos A e B tais que:

$A \times B = \{(-1, 0), (2, 0), (-1, 2), (2, 2), (-1, 3), (2, 3)\}$. O número de elementos do conjunto $A \cap B$ é:

a) 0

■ b) 1

c) 2

d) 3

$A = \{-1, 2\}$
$B = \{0, 2, 3\}$

$A \cap B = \{2\}$
$n(A \cap B) = 1$

11

RELAÇÕES E FUNÇÕES

CONCEITO DE RELAÇÃO R DE A EM B

Considere os conjuntos: $A = \{1, 2, 5\}$
$B = \{2, 4\}$

Formemos o produto cartesiano de A por B:

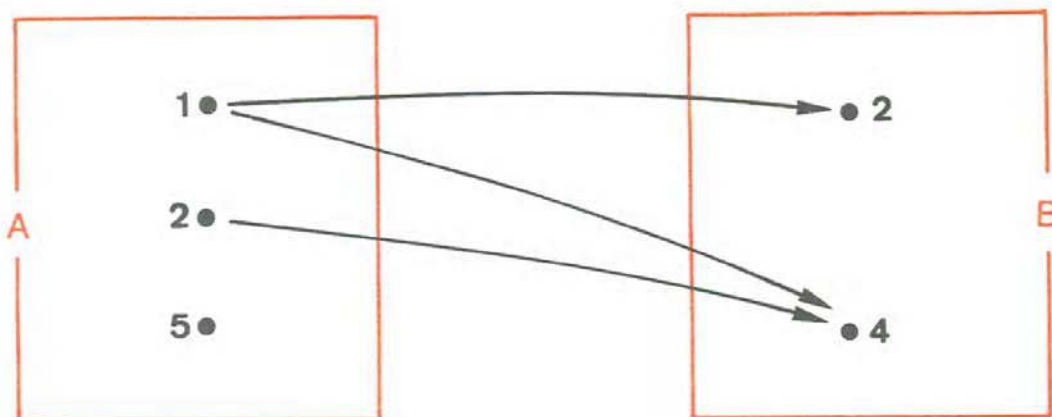
$A \times B = \{(1, 2), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (5, 2), (5, 4)\}$

A sentença **x é menor que y**, onde $x \in A$ e $y \in B$, determina um conjunto de pares ordenados:

$$R = \{(1, 2), (1, 4), (2, 4)\}$$

Temos:

$$R \subset A \times B$$

A relação R pode ser representada pelo diagrama:

Uma relação de A em B é qualquer subconjunto de $A \times B$.

Exemplo:

Sejam A = { 1, 2, 3 } e B = { 5, 6 }, os subconjuntos de A × B:

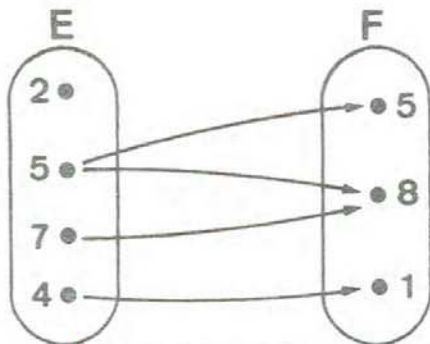
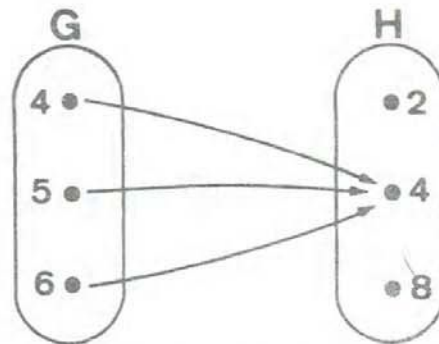
$R_1 = \{ (1, 5), (2, 6), (3, 6) \}$

$R_2 = \{ (2, 6), (3, 5) \}$

$R_3 = \{ (1, 6), (2, 6), (3, 5), (3, 6) \}$

são relações de A em B.

EXERCÍCIOS

1) Considere as relações dadas pelos diagramas abaixo. Represente-as enumerando os pares ordenados:

R = {(5, 5), (5, 8), (7, 8), (4, 1)}

R = {(4, 4), (5, 4), (6, 4)}

2) Sendo A = { 1, 2 } e B = { 1, 3, 4 }, determine:

a) A × B. *{(1, 1), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 3), (2, 4)}*

b) A relação formada pelos pares ordenados em que o 1º elemento é **menor** que o 2º elemento. *R = {(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)}*

c) A relação formada pelos pares ordenados em que o 1º elemento é **maior** que o 2º elemento. *R = {(2, 1)}*

d) A relação formada pelos pares ordenados em que o 1º elemento é **igual** ao 2º elemento. *R = {(1, 1)}*

e) A relação formada pelos pares ordenados em que o 1º elemento é o **dobro** do 2º elemento. *R = {(2, 1)}*

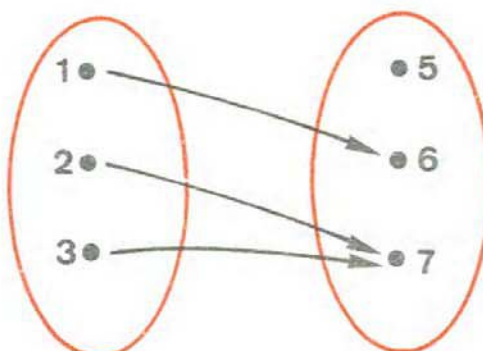
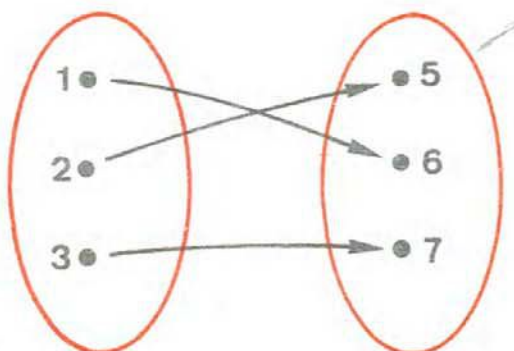
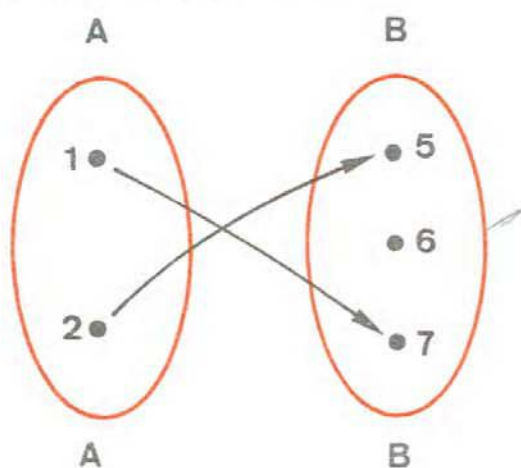
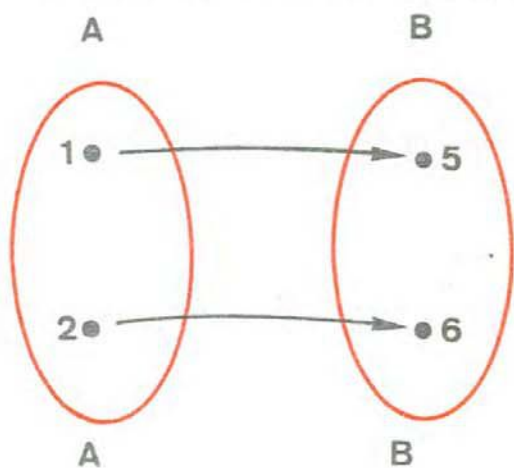
f) A relação formada pelos pares ordenados em que o 2º elemento é o **dobro** do 1º elemento. *R = {(2, 4)}*

3) Qual a relação formada pelos pares ordenados do produto cartesiano { 1, 2, 3 } × { 2, 4, 5 } em que o segundo elemento é o dobro do primeiro elemento? *R = {(1, 2), (2, 4)}*

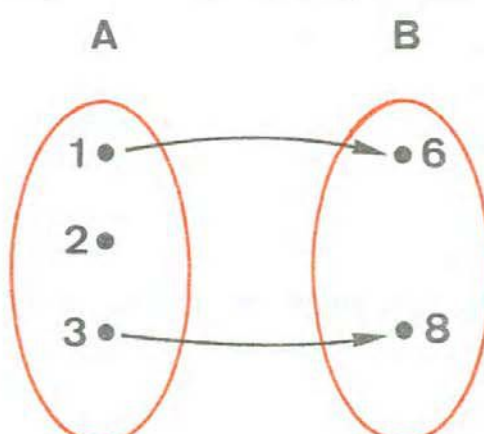
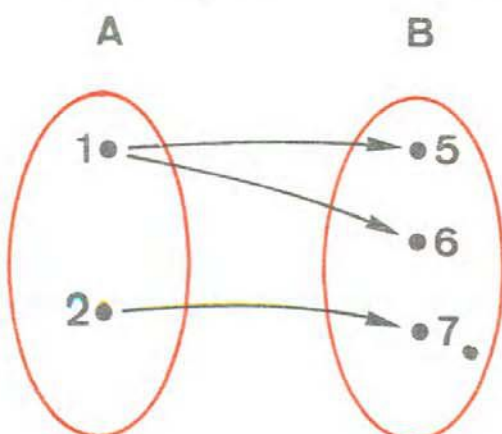
FUNÇÃO

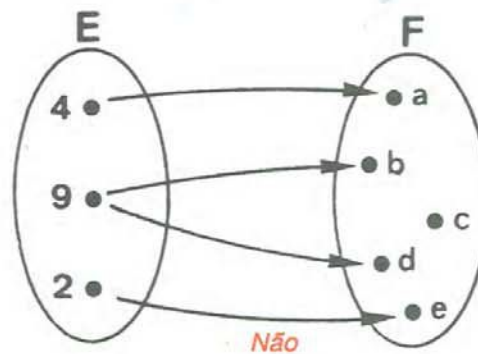
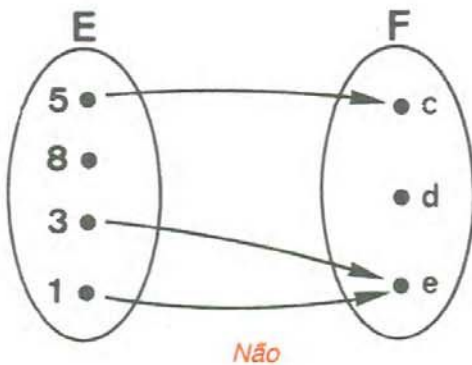
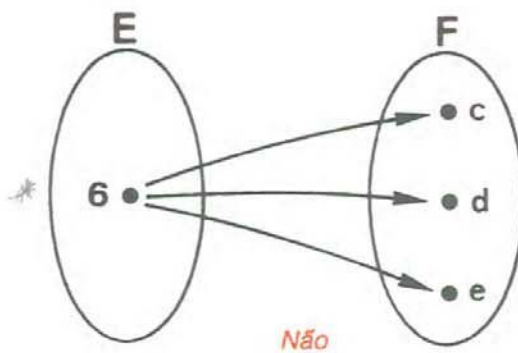
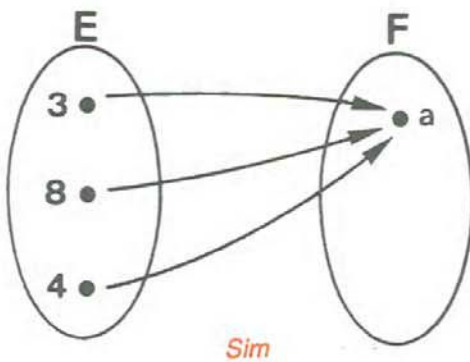
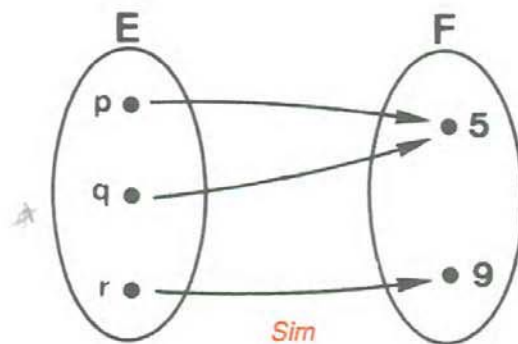
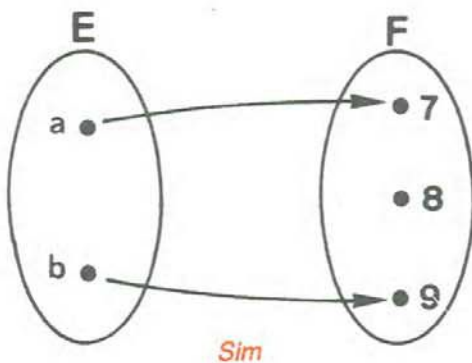
Uma relação de A em B é chamada de **função** ou **aplicação** quando associa a todo elemento de A um único elemento em B.

Exemplos:

- São **funções** de A em B, as relações representadas nos diagramas:

Observe:

- Em A, não sobra elemento; em B pode sobrar.
- Em A, de cada elemento "parte" uma única flecha; em B, um elemento pode receber mais de uma flecha.

- Não são funções de A em B, as relações representadas nos diagramas:

EXERCÍCIOS

1) Indique os diagramas que representam uma função de E em F:

2) Dados os conjuntos: A = { 0, 1, 2, 3 } e B = { 3, 4, 5, 6 }, considere as relações de A em B.

a) $R_1 = \{ (0, 3), (1, 5), (2, 6), (3, 4) \}$ *É função.*

b) $R_2 = \{ (0, 3), (1, 4), (2, 6), (1, 5) \}$ *Não é função.*

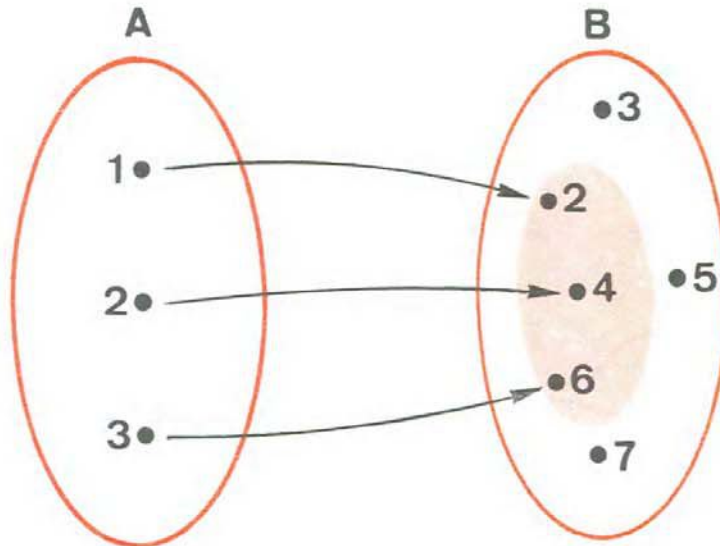
c) $R_3 = \{ (0, 5), (1, 6), (2, 6), (3, 4) \}$ *É função.*

d) $R_4 = \{ (0, 5), (1, 6), (2, 3) \}$ *Não é função.*

e) $R_5 = \{ (3, 4), (2, 6), (1, 5), (0, 3) \}$ *É função.*

Faça o diagrama de flechas para cada relação e verifique as relações que são funções de A em B.

DOMÍNIO, CONTRADOMÍNIO E CONJUNTO IMAGEM DE UMA FUNÇÃO

Seja f uma função de A em B.

$$f = \{ (1, 2), (2, 4), (3, 6) \}$$

- O conjunto A é o **domínio** da função *(conjunto de partida).*

  No exemplo, temos:

  domínio $= \{ 1, 2, 3 \}$

- O conjunto B é o **contradomínio** da função *(conjunto de chegada).*

  No exemplo, temos:

  contradomínio $= \{ 2, 3, 4, 5, 6, 7 \}$

- A **imagem** da função é formada por todos os elementos de B que ficam associados a elementos de A *(elementos de B que recebem flechas).*

  No exemplo, temos:

  imagem $= \{ 2, 4, 6 \}$

O conjunto imagem é um subconjunto do contradomínio.

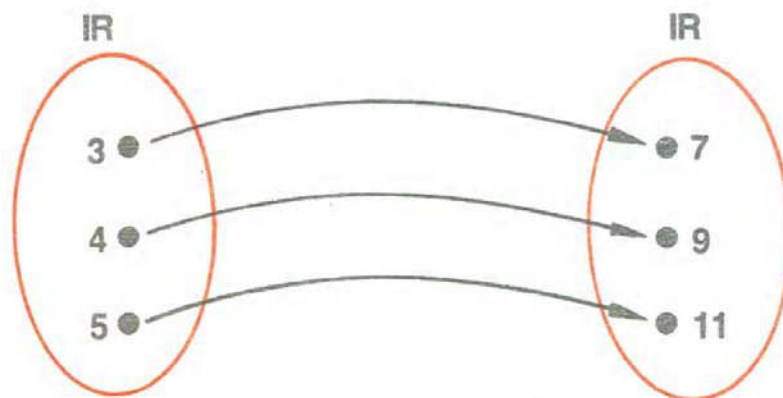
NOTAÇÃO DE FUNÇÃO

Considere a função f definida de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, tal que $y = 2x + 1$.

Observe, por exemplo, que:

Para $x = 3$, temos $y = 2 . 3 + 1 = 7$.

Para $x = 4$, temos $y = 2 . 4 + 1 = 9$.

Para $x = 5$, temos $y = 2 . 5 + 1 = 11$.

Dizemos que:

- 7 é a imagem de 3 pela função f. Escrevemos $f (3) = 7$.
- 9 é a imagem de 4 pela função f. Escrevemos $f (4) = 9$.
- 11 é a imagem de 5 pela função f. Escrevemos $f (5) = 11$.

Então:

> Em vez de escrever $y = 2x + 1$, podemos escrever $f (x) = 2x + 1$.

Onde:

x ⟶ representa um elemento genérico do domínio da função.

$f (x)$ ⟶ representa o valor da função para o **x** considerado.

Nota:

Para definir uma função, é necessário especificar o seu domínio e o seu contra-domínio. Neste livro, estudaremos as funções definidas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1 Dada a função definida por:

$$f(x) = 2x + 1$$

calcular:

a) $f(0)$

b) $f(7)$

c) $f(-2)$

d) $f(-5)$

Solução:

a) Vamos substituir x por 0

$f(x) = 2x + 1$

$f(0) = 2 . 0 + 1$

$f(0) = 0 + 1$

$f(0) = 1$

b) Vamos substituir x por 7

$f(x) = 2x + 1$

$f(7) = 2 . 7 + 1$

$f(7) = 14 + 1$

$f(7) = 15$

c) Vamos substituir x por − 2

$f(x) = 2x + 1$

$f(-2) = 2 . (-2) + 1$

$f(-2) = -4 + 1$

$f(-2) = -3$

d) Vamos substituir x por − 5

$f(x) = 2x + 1$

$f(-5) = 2 . (-5) + 1$

$f(-5) = -10 + 1$

$f(-5) = -9$

2 Dada a função definida por:

$$f(x) = 2x^2 - 1$$

calcular:

a) $f(3)$

b) $f(-7)$

c) $f(-1)$

d) $f\left(-\frac{1}{2}\right)$

Solução:

a) Vamos substituir x por 3

$f(x) = 2x^2 - 1$

$f(3) = 2 . 3^2 - 1$

$f(3) = 2 . 9 - 1$

$f(3) = 18 - 1$

$f(3) = 17$

b) Vamos substituir x por − 7

$f(x) = 2x^2 - 1$

$f(-7) = 2 . (-7)^2 - 1$

$f(-7) = 2 . 49 - 1$

$f(-7) = 98 - 1$

$f(-7) = 97$

c) $f(x) = 2x^2 - 1$ (Vamos substituir x por − 1)

$f(-1) = 2 \cdot (-1)^2 - 1$

$f(-1) = 2 \cdot 1 - 1$

$f(-1) = 2 - 1$

$f(-1) = 1$

d) $f(x) = 2x^2 - 1$ $\left(\text{Vamos substituir x por } -\frac{1}{2}\right)$

$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 1$

$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \frac{1}{4} - 1$

$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{4} - 1$

$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2-4}{4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$

EXERCÍCIOS

1) Dada a função definida por:

$$f(x) = 3x - 2$$

Calcule:

a) $f(0)$ *Resp.: − 2*

b) $f(1)$ *Resp.: 1*

c) $f(-2)$ *Resp.: − 8*

d) $f(-4)$ *Resp.: − 14*

2) Dada a função definida por:

$$f(x) = x^2 - 5x - 10$$

Calcule:

a) $f(4)$ *Resp.: − 14*

b) $f(-2)$ *Resp.: 4*

3) Dada a função definida por:

$$f(x) = x + \frac{1}{x}$$

Calcule:

a) $f(3)$ $\frac{10}{3}$

b) $f(-1)$ -2

c) $f(1) + f(2)$ $\frac{9}{2}$

d) $f\left(\frac{1}{2}\right)$ $\frac{5}{2}$

4) (MACK-SP) Dada a função definida por f (x) = 3x + 1, calcule $\frac{f(235) - f(129)}{106}$.

f(235) = 706; f(129) = 388 — Então: $\frac{706 - 388}{106} = 3$ Resp.: 3

5) Dada a função definida por:

$$f(x) = 3x^2 - 5$$

Calcule:

a) f (– 1) Resp.: – 2

b) f (– 2) Resp.: 7

c) $f\left(\frac{1}{2}\right)$ Resp.: $-\frac{17}{4}$

d) $f\left(-\frac{3}{2}\right)$ Resp.: $\frac{7}{4}$

6) (MAUÁ-SP) Sendo $f(x) = \frac{x + 2}{x - 5}$, calcule $f\left(\frac{1}{2}\right)$. Resp.: $-\frac{5}{9}$

7) Seja a função definida por f (x) = 2x – 1. Calcule o valor de x tal que f (x) = 7.

Solução:

Vamos substituir f (x) pelo valor indicado e resolver a equação resultante:

f (x) = 2x – 1 Então 2x – 1 = 7

2x = 7 + 1

2x = 8

x = 4

8) Sendo f (x) = 3x – 1, determine o valor de x de modo que:

a) f (x) = 11 (4)

b) f (x) = – 7 (– 2)

c) f (x) = 0 $\left(\frac{1}{3}\right)$

d) $f(x) = \frac{1}{2}$ $\left(\frac{1}{2}\right)$

9) Sendo $f(x) = x^2 - 7x + 6$, determine os valores de x de modo que:

a) f (x) = 0 1 ou 6

b) f (x) = – 6 3 ou 4

10) (FUVEST-SP) Seja $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$. Calcule x sabendo que f (x) = 1.

Resp.: x = 0 ou $x = \frac{3}{2}$

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1) Entre as relações abaixo dadas por diagramas, quais são as funções de G em H:

a)

Função

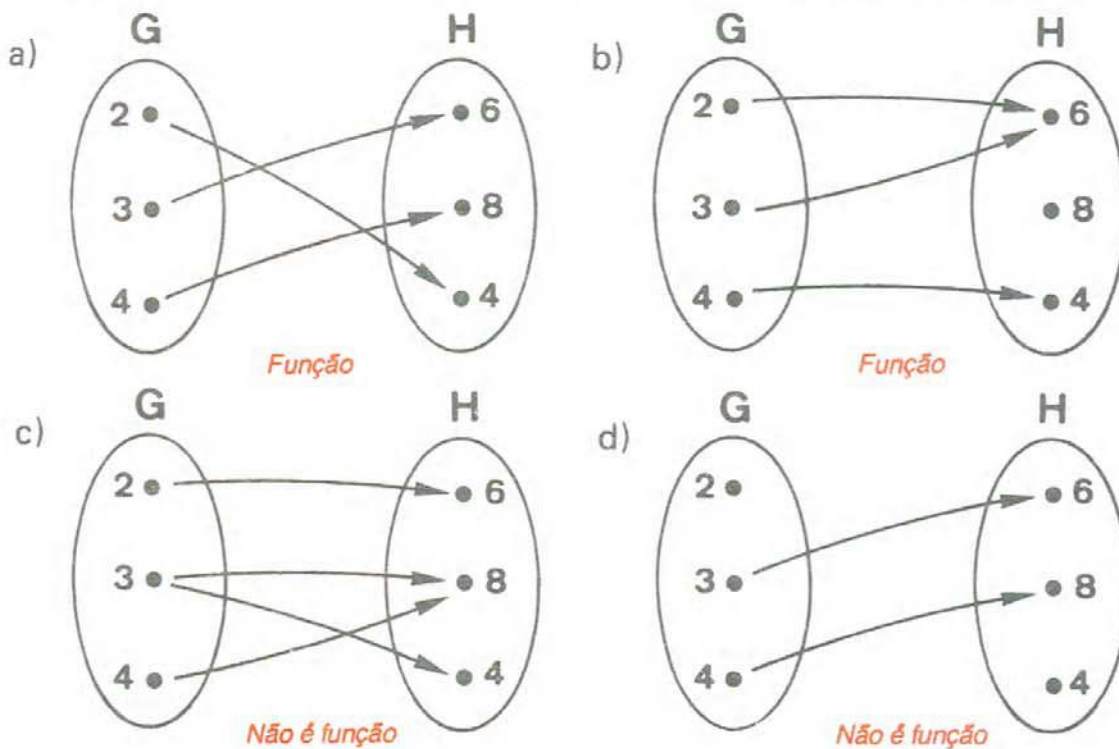
b)

Função

c)

Não é função

d)

Não é função

2) Dados os conjuntos: A = { 0, 1, 2 } e B = { 4, 5, 6 }, considere as seguintes relações de A em B:

a) $R_1 = \{ (0, 4), (1, 5), (2, 6) \}$

b) $R_2 = \{ (0, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 5) \}$

c) $R_3 = \{ (0, 6), (1, 4), (2, 5) \}$

d) $R_4 = \{ (0, 4), (1, 6) \}$

Faça o diagrama de flechas para cada relação e verifique as relações que são funções de A em B: *Resp.: R_1 e R_3 são funções.*

3) Uma função de A em B é assim definida:

$$f = \{ (2, 4), (3, 9), (5, 25), (1, 1) \}$$

a) Qual é o domínio dessa função? *D = { 2, 3, 5, 1 }*

b) Qual é o conjunto imagem dessa função? *I = { 4, 9, 25, 1 }*

4) Dada a função definida por:

$$f(x) = 2x^2 - 1$$

Calcule:

a) f (0) *−1* b) f (5) *49* c) f (−3) *17* d) f (−5) *49*

5) Dada a função definida por:

$$f(x) = x^2 - 3x + 2$$

Calcule:

a) $f(0)$ *Resp.: 2*

b) $f(1)$ *Resp.: 0*

c) $f(-1)$ *Resp.: 6*

d) $f(-5)$ *Resp.: 42*

6) Dada a função definida por:

$$f(x) = \frac{3x}{2} + \frac{1}{4}$$

Calcule:

a) $f(1)$ *Resp.:* $\frac{7}{4}$

b) $f(2)$ *Resp.:* $\frac{13}{4}$

c) $f(-1)$ *Resp.:* $-\frac{5}{4}$

d) $f(-2)$ *Resp.:* $-\frac{11}{4}$

7) Dada a função definida por:

$$f(x) = \frac{4x - 18}{3x - 4}$$

Calcule:

a) $f(1)$ *Resp.: 14*

b) $f(3)$ *Resp.:* $-\frac{6}{5}$

c) $f(2)$ *Resp.: −5*

d) $f(-1)$ *Resp.:* $\frac{22}{7}$

8) Sendo $f(x) = \dfrac{3x - 1}{x^2 + 1}$, calcule:

a) $f(2)$ *1*

b) $f(-1)$ *−2*

c) $f(1) + f(3)$ $\frac{9}{5}$

d) $f(-1) + f(-2)$ $-\frac{17}{5}$

9) (UF-Viçosa) Seja a função definida por $f(x) = x^2 - 1$. Calcule $f\left(\frac{1}{2}\right)$.

Resp.: $-\frac{3}{4}$

10) (PUC-SP) Seja D = { 1, 2, 3, 4, 5 } o domínio da função $f(x) = (x - 2)(x - 4)$. Determine o seu conjunto imagem.

Resp.: $I = \{3, 0, -1\}$

$f(1) = 3$
$f(2) = 0$
$f(3) = -1$
$f(4) = 0$
$f(5) = 3$

11) Sendo $f(x) = \dfrac{1 - 2x}{3}$, determine o valor de x de modo que $f(x) = -5$.

$-5 = \frac{1 - 2x}{3} \Rightarrow x = 8$

12) Sendo $f(x) = \dfrac{5x - 4}{2}$, determine o valor de x de modo que $f(x) = 8$.

$\dfrac{5x-4}{2} = 8 \Rightarrow x = 4$

13) Sendo $f(x) = x^2 - 5x + 6$, determine o valor de x de modo que $f(x) = 0$.

$x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x = 2$ ou $x = 3$

TESTES

1) (UF-Uberlândia) Dados os conjuntos $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ e $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, qual entre as relações seguintes representa uma função de A em B?

a) $\{(-1, 0), (0, 1), (1, 2), (1, 0)\}$
b) $\{(0, -1), (1, 0), (2, 1), (4, 2)\}$
■ c) $\{(-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4)\}$
d) $\{(-1, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 4), (2, 4)\}$

2) (UF-PR) Sejam os conjuntos $A = \{6, 8, 9\}$ e $B = \{a, e, i, o, u\}$. Qual das relações abaixo é uma função de A em B?

■ a) $\{(9, a), (6, i), (8, i)\}$
b) $\{(6, u), (8, i), (8, a)\}$
c) $\{(6, e), (8, o), (9, u), (9, i)\}$
d) $\{(8, a), (6, e), (8, u), (6, i), (9, o)\}$

3) (FMU-SP) Seja a função definida por $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$. Então, o valor de $f(0)$ é:

■ a) 3
b) 0
c) -3
d) $-\dfrac{3}{9}$

4) (CESCEM-SP) Se $f(x) = 2x^3$ então os valores de $f(0)$; $f(-1)$; $f(2)$; $f(-2)$ são respectivamente:

a) 2, 2, 4, − 4
■ b) 0, − 2, 16, − 16
c) 0, − 6, 16, − 16
d) 0, 2, 16, 16

5) (PUC-SP) Sendo $f(x) = 7x + 1$, então $\dfrac{f(12) - f(9)}{3}$ é igual a:

a) -1
b) 3
c) 5
■ d) 7

$f(12) = 85$
$f(9) = 64$ $\Rightarrow \dfrac{85 - 64}{3} = 7$

6) (FMU-SP) Se $f(x) = x^0 + 0^x + \sqrt{x} + \sqrt{0}$, então $f(1)$ é igual a:

a) 1
■ b) 2
c) indeterminado
d) não está definido

$f(1) = 1^0 + 0^1 + \sqrt{1} + \sqrt{0}$
$f(1) = 2$

7) Se $f(x) = x^2 - 1$, então o valor de $f(3) + f(4)$ é:

■ a) 23
b) 15
c) 13
d) 48

$f(3) = 8$
$f(4) = 15$ $f(3) + f(4) = 8 + 15 = 23$

8) (MACK-SP) Se $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{5}$, então $f\left(\dfrac{2}{5}\right)$ é igual a:

a) $\dfrac{3}{5}$
b) $\dfrac{9}{5}$
■ c) $\dfrac{9}{25}$
d) $\dfrac{6}{25}$

$f\left(\dfrac{2}{5}\right) = \dfrac{4}{25} + \dfrac{1}{5}$
$f\left(\dfrac{2}{5}\right) = \dfrac{9}{25}$

9) (FMU-SP) Se $f(x) = 2x^3 - 1$, então $f(0) + f(-1) + f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ é igual a:

a) $-\dfrac{3}{4}$
b) $-\dfrac{15}{4}$
■ c) $-\dfrac{19}{4}$
d) $-\dfrac{17}{4}$

$f(0) = -1$
$f(-1) = -3$
$f\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{3}{4}$

Então:
$-1 - 3 - \dfrac{3}{4} =$
$= -\dfrac{19}{4}$

10) Sabendo que $f(x) = 2x - 1$ e $f(x) = 21$, então o valor de x é:

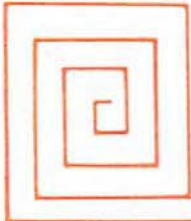
a) 10
■ b) 11
c) 12
d) 13

$21 = 2x - 1$
$x = 11$

11) (PUC-RS) Seja a função definida por $f(x) = \dfrac{2x - 3}{5x}$. O elemento do domínio que tem $-\dfrac{2}{5}$ como imagem é:

a) 0
b) $\dfrac{2}{5}$
c) -3
■ d) $\dfrac{3}{4}$

$-\dfrac{2}{5} = \dfrac{2x - 3}{5x} \Rightarrow x = \dfrac{3}{4}$

12

FUNÇÃO DO 1º GRAU

FUNÇÃO DO 1º GRAU

Chama-se função do 1º grau a função definida por:

$$y = ax + b$$

onde a e b são números reais e $a \neq 0$.

Exemplos:

❶ $y = 2x + 1$

❷ $y = -x + 5$

❸ $y = 3x$

❹ $y = -4x$

Observações:

- *A função do 1º grau é também chamada de* função afim.
- *Se b = 0 (exemplos* ❸ *e* ❹ *), a função também é dita* linear.

EXERCÍCIOS

1) Quais são funções do 1º grau?

■ a) $y = x + 6$

■ b) $y = 5x - 1$

■ c) $y = 2 - 3x$

■ d) $y = \frac{x}{5} - 7$

e) $y = x^2$

■ f) $y = 8x$

g) $y = \sqrt{x}$

h) $y = \frac{4}{x}$

i) $y = x^2 - 3$

■ j) $y = -4x - 9$

l) $y = x^2 - 5x + 6$

■ m) $y = \frac{1}{3} - 4x$

2) Verifique se a função $y = 3(x + 1) + 2(x - 1)$ é do 1º grau.

$y = 5x + 1$. É uma função do 1º grau.

3) Verifique se a função $y = (3x + 1)(3x - 1) - 9x^2 + 4x$ é do 1º grau.

$y = 4x - 1$. É uma função do 1º grau.

REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DA FUNÇÃO DO 1º GRAU

Vamos construir o gráfico da função:

$$\boxed{y = x + 1}$$

Vamos atribuir valores quaisquer para **x** e obter, pela substituição, os valores correspondentes de **y**.

Veja:

Para $\boxed{x = 2}$ $\Rightarrow$ $y = 2 + 1$ $\Rightarrow$ $\boxed{y = 3}$

Para $\boxed{x = 1}$ $\Rightarrow$ $y = 1 + 1$ $\Rightarrow$ $\boxed{y = 2}$

Para $\boxed{x = 0}$ $\Rightarrow$ $y = 0 + 1$ $\Rightarrow$ $\boxed{y = 1}$

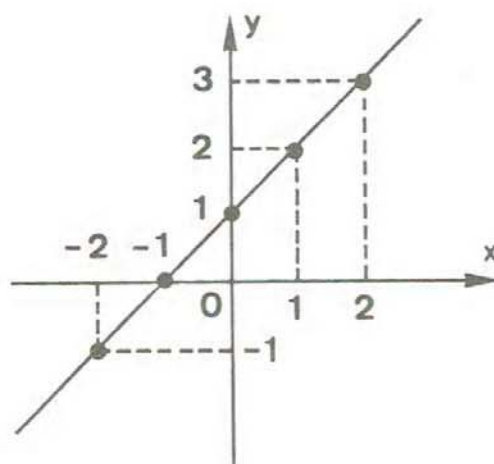
Para $\boxed{x = -1}$ $\Rightarrow$ $y = -1 + 1$ $\Rightarrow$ $\boxed{y = 0}$

Para $\boxed{x = -2}$ $\Rightarrow$ $y = -2 + 1$ $\Rightarrow$ $\boxed{y = -1}$

⋮ ⋮

A seguir, representamos os pontos no plano cartesiano e, unindo-os, obteremos o gráfico da função $y = x + 1$, que é uma reta.

Tabela / **Pontos**

x	y		Pontos
2	3	→	(2, 3)
1	2	→	(1, 2)
0	1	→	(0, 1)
−1	0	→	(−1, 0)
−2	−1	→	(−2, −1)
⋮	⋮		

> Como o gráfico de uma função do 1º grau é sempre uma **reta**, basta localizar dois de seus pontos para traçá-lo.

Exemplo 1

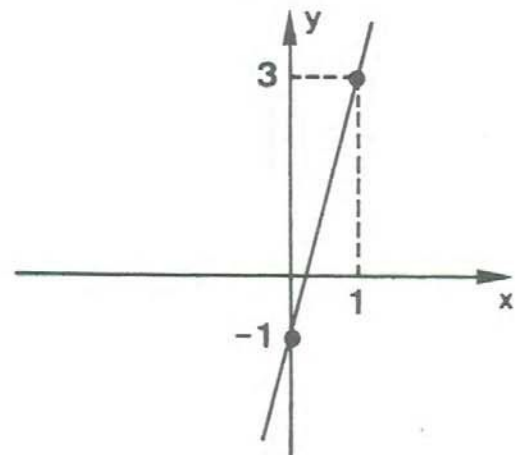
Traçar o gráfico da função $y = 4x - 1$.

Solução:

Para $x = 0 \Rightarrow y = 4 . 0 - 1 \Rightarrow y = -1$
Para $x = 1 \Rightarrow y = 4 . 1 - 1 \Rightarrow y = 3$

Tabela **Pontos** **Gráfico**

x	y
0	−1
1	3

→ (0, −1)
→ (1, 3)

Nota:

Os valores atribuídos a **x** são arbitrários, mas, de preferência, atribuímos valores inteiros, para facilitar os cálculos e a marcação dos pontos no plano.

Exemplo 2

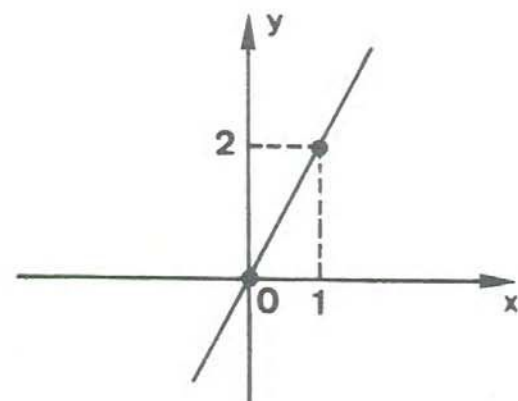
Traçar o gráfico da função $y = 2x$.

Solução:

Para $x = 0 \Rightarrow y = 2 . 0 \Rightarrow y = 0$
Para $x = 1 \Rightarrow y = 2 . 1 \Rightarrow y = 2$

Tabela **Pontos** **Gráfico**

x	y
0	0
1	2

→ (0, 0)
→ (1, 2)

Exemplo 3

Traçar o gráfico da função $y = -3x + 2$.

Solução:

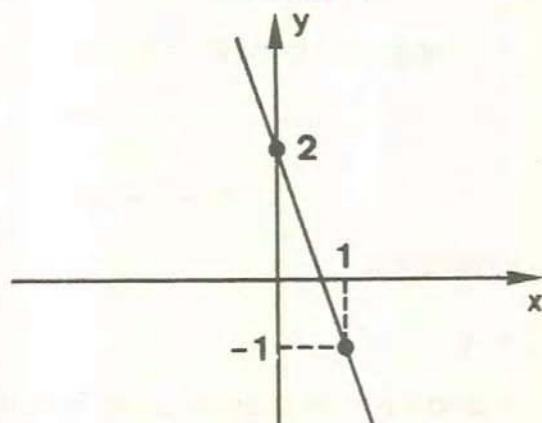
Para $x = 0 \Rightarrow y = -3 . 0 + 2 \Rightarrow y = 2$

Para $x = 1 \Rightarrow y = -3 . 1 + 2 \Rightarrow y = -1$

Tabela | **Pontos** | **Gráfico**

x	y
0	2
1	−1

→ (0, 2)

→ (1, −1)

EXERCÍCIOS

1) Faça o gráfico das funções definidas por:

a) $y = x + 3$

b) $y = 2x - 1$

c) $y = 4x$

d) $y = -2x$

e) $y = 3x + 2$

f) $y = -2x + 1$

g) $y = x$

h) $y = 4 - x$

i) $y = -x + 5$

j) $y = 1 - 3x$

2) Faça o gráfico das funções definidas por:

a) $y = \frac{x}{2}$

b) $y = \frac{x}{2} + 1$

c) $y = \frac{1}{3} x - 2$

d) $y = -\frac{x}{4} + 2$

3) Faça o gráfico das funções definidas por:

a) $y - x = 3$

b) $2y - 2x = 4$

4) Faça o gráfico das funções definidas por:

a) $y = 2(2x - 1)$

b) $y = 2x + (x - 2)$

5) Represente numa mesma figura os gráficos de $y = x + 1$ e $y = 2x - 1$.

FUNÇÃO CONSTANTE

A **função constante** é definida por:

$$\boxed{y = b}$$ (b é um número real)

Exemplos:

a) $y = 2$

b) $y = -3$

Vamos traçar o gráfico da função y = 2.

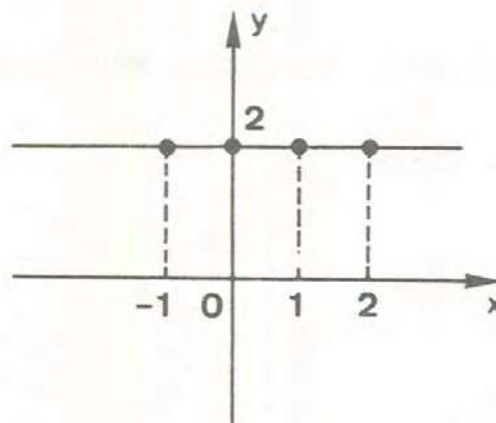
Esta função pode ser escrita assim: $y = 0 \,.\, x + 2$.
Para qualquer valor real de x, o valor correspondente de y será sempre 2.

Veja:

Para $x = -1 \Rightarrow y = 0 \,.\, (-1) + 2 \Rightarrow y = 2$
Para $x = 0 \Rightarrow y = 0 \,.\, (0) + 2 \Rightarrow y = 2$
Para $x = 1 \Rightarrow y = 0 \,.\, (1) + 2 \Rightarrow y = 2$
Para $x = 2 \Rightarrow y = 0 \,.\, (2) + 2 \Rightarrow y = 2$

Tabela | **Pontos** | **Gráfico**

x	y
−1	2
0	2
1	2
2	2

→ (−1, 2)
→ (0, 2)
→ (1, 2)
→ (2, 2)

O gráfico de uma função constante é uma reta paralela ao eixo x.

EXERCÍCIOS

1) Quais são funções constantes?

a) $y = x$

■ b) $y = 5$

■ c) $y = \frac{1}{2}$

■ d) $y = -6$

■ e) $y = 1$

f) $y = -x + 1$

2) Faça o gráfico das seguintes funções constantes:

a) $y = 3$

b) $y = 1$

c) $y = 4$

d) $y = -3$

e) $y = -1$

f) $y = -4$

ZEROS DA FUNÇÃO DO 1º GRAU

Chama-se **zero da função do 1º grau** o valor de x para o qual $y = 0$.

Assim, para calcular o zero da função, basta resolver a equação do 1º grau $ax + b = 0, (a \neq 0)$.

Exemplos:

❶ Determinar o zero da função $y = 3x - 15$.

Solução:

Fazendo $y = 0$, temos:

$$3x - 15 = 0$$
$$3x = 15$$
$$x = \frac{15}{3}$$
$$x = 5$$

Nota: A reta $y = 3x - 15$ corta o eixo x no ponto $(5, 0)$.

❷ Determinar o zero da função $y = 4x - 1$.

Solução:

Fazendo $y = 0$, temos:

$$4x - 1 = 0$$
$$4x = 1$$
$$x = \frac{1}{4}$$

Nota: A reta $y = 4x - 1$ corta o eixo x no ponto $\left(\frac{1}{4}, 0\right)$.

EXERCÍCIOS

1) Determine os zeros das seguintes funções do 1º grau:

a) $y = x + 7$ $(x = -7)$

b) $y = -5x + 5$ $(x = 1)$

c) $y = -\dfrac{x}{2} + 3$ $(x = 6)$

d) $y = -3x + 6$ $(x = 2)$

e) $y = -3x + 2$ $\left(x = \dfrac{2}{3}\right)$

f) $y = 2 - \dfrac{x}{2}$ $(x = 4)$

2) Determine as coordenadas do ponto de intersecção do eixo x com as seguintes retas:

a) $y = x - 3$ Resp.: $(3, 0)$

b) $y = x + 7$ Resp.: $(-7, 0)$

c) $y = 3x - 4$ Resp.: $\left(\dfrac{4}{3}, 0\right)$

d) $y = -4x - 8$ Resp.: $(-2, 0)$

e) $y = -2x + 6$ Resp.: $(3, 0)$

f) $y = 2 - 2x$ Resp.: $(1, 0)$

CONDIÇÃO PARA UM PONTO PERTENCER A UMA RETA

Um ponto P (x, y) pertence a uma reta se as suas coordenadas satisfazem à equação da reta dada.

Exemplo:

Verifique quais dos pontos abaixo pertencem à reta $y = 3x - 1$.

a) A (2, 5)

b) B (3, 7)

Solução:

a) Substituímos, na equação, x por 2 e y por 5 e verificamos se a sentença obtida é verdadeira ou falsa.

$y = 3x - 1$
$5 = 3 . 2 - 1$
$5 = 6 - 1$
$5 = 5$ (verdadeira)

Logo, o ponto A (2, 5) pertence à reta.

b) Substituindo, na equação, x por 3 e y por 7, vem:

$y = 3x - 1$
$7 = 3 . 3 - 1$
$7 = 9 - 1$
$7 = 8$ (falsa)

Logo, o ponto B (3, 7) **não** pertence à reta.

EXERCÍCIOS

1) Verifique quais dos pontos abaixo pertencem à reta da equação $y = x + 3$:

a) A (7, 3) $(\notin)$ b) B (5, 2) $(\in)$ c) C (0, 4) $(\notin)$ d) E (− 5, − 2) $(\in)$

2) Verifique quais dos pontos abaixo pertencem à reta da equação $y = 2x - 1$:

a) A (1, 1) $(\in)$ b) B (2, 3) $(\in)$ c) C (− 1, 1) $(\notin)$ d) D (− 2, 5) $(\notin)$

3) Verifique se o ponto:

a) E (4, 7) pertence à reta $y = 1 - 2x$ *Resp.: E $\notin$ à reta.*

b) F (− 1, 0) pertence à reta $y = -4x + 5$ *Resp.: F $\notin$ à reta.*

c) G (− 2, − 3) pertence à reta $y = x - 1$ *Resp.: G $\in$ à reta.*

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1) Faça o gráfico das funções definidas por:

a) $y = x + 6$

b) $y = -3x$

c) $y = 3x + 3$

d) $y = -x$

e) $y = -x + 1$

f) $y = 3x - 2$

g) $x + y = 5$

h) $4y + 4x = 12$

2) Faça o gráfico das funções definidas por:

a) $y = \frac{x}{2}$

b) $y = \frac{x}{4}$

c) $y = \frac{x}{4} + 1$

d) $y = 1 - \frac{x}{2}$

3) Faça o gráfico das seguintes funções constantes:

a) $y = 5$

b) $y = \frac{1}{2}$

c) $y = -5$

d) $y = -\frac{1}{2}$

4) Determine os zeros das seguintes funções do 1º grau:

a) $y = x - 3$ $(x = 3)$

b) $y = 2x + 1$ $\left(x = -\frac{1}{2}\right)$

c) $y = 4 - 2x$ $(x = 2)$

d) $y = -7x + 7$ $(x = 1)$

e) $y = x + 5$ $(x = -5)$

f) $y = \frac{1}{2}x - 2$ $(x = 4)$

TESTES

1) Qual das funções abaixo **não** é do 1º grau?

a) $y = 8x - 1$

b) $y = \frac{1}{3}x$

c) $y = 4 - x$

■ d) $y = \frac{1}{x}$

2) A relação que existe entre x e y segundo a tabela ao lado é:

a) $y = 1 - x$

b) $y = x - 1$

■ c) $y = x + 1$

d) $y = 2x - 1$

x	3	5	7	9
y	4	6	8	10

3) Qual a função cujo gráfico **não** passa pela origem do sistema cartesiano?

a) $y = x$

b) $y = \frac{x}{3}$

c) $y = -2x$

■ d) $y = 2x - 1$

4) Qual a função cujo gráfico passa pela origem do sistema cartesiano?

a) $y = 3x + 1$

b) $y = 5x - 1$

■ c) $y = 4x$

d) $y = x + 2$

5) O zero da função $y = \frac{1}{2}x + 1$ é:

a) 2

■ b) -2

c) 1

d) $\frac{3}{4}$

$\frac{1}{2}x + 1 = 0$

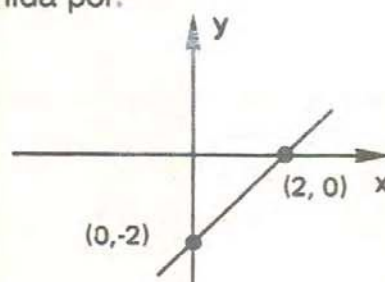
$x = -2$

6) O gráfico ao lado representa a função definida por:

a) $y = x + 2$

■ b) $y = x - 2$

c) $y = 2x + 2$

d) $y = 2x - 2$

7) (UF-MA) A representação gráfica da função $y = -3$ é uma reta:

a) paralela ao eixo das ordenadas.

■ b) perpendicular ao eixo das ordenadas.

c) perpendicular ao eixo das abscissas.

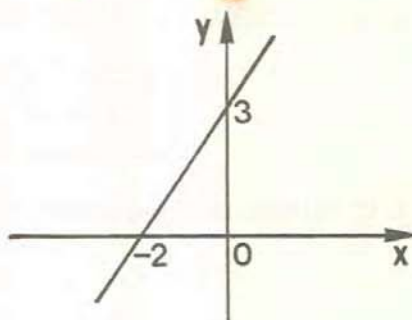
d) que intercepta os dois eixos.

8) (FM-Itajubá) O gráfico abaixo pode representar qual das expressões?

a) $y = 2x - 3$

b) $y = -2x + 3$

■ c) $y = 1{,}5x + 3$

d) $3y = -2x$

9) Seja a função do 1º grau $y = -3x + 2$. O valor de x tal que $f(x) = 0$ é:

a) -2

■ b) $\frac{2}{3}$

c) -3

d) $-\frac{2}{3}$

$-3x + 2 = 0$
$-3x = -2$
$x = \frac{2}{3}$

10) A equação de uma reta é $my = x - 2$. Se o ponto $(-2, 8)$ pertence a esta reta, então:

a) $m = 2$

b) $m = \frac{1}{2}$

c) $m = -2$

■ d) $m = -\frac{1}{2}$

$m \cdot 8 = -2 - 2$
$8m = -4$
$m = -\frac{1}{2}$

11) (UF - RN) Seja a função linear $y = ax - 4$. Se $y = 10$ para $x = -2$, então o valor de y para $x = -1$ é:

■ a) 3
b) 4
c) -7
d) -11

$y = ax - 4$
$10 = a(-2) - 4$
$2a = -14$
$a = -7$

$y = -7x - 4$
$y = -7(-1) - 4$
$y = 7 - 4$
$y = 3$

13

FUNÇÃO QUADRÁTICA OU FUNÇÃO DO 2º GRAU

DEFINIÇÃO

Chama-se função quadrática a função definida por:

$$y = ax^2 + bx + c$$

onde **a, b** e **c** são números reais e $a \neq 0$.

Exemplos:

1. $y = x^2 - 7x + 10$
2. $y = 3x^2 - x - 4$
3. $y = 3x^2$
4. $y = x^2 - 4$

EXERCÍCIOS

1) Quais são funções quadráticas ?

- ■ a) $y = x^2 - 5x + 6$
- ■ b) $y = 3x^2 - 2x + 1$
- c) $y = 5x - x + 3$
- d) $y = 2^x + 4x - 1$
- ■ e) $y = 5x^2$
- ■ f) $y = -x^2 + 4$
- g) $y = 2x - 5$
- ■ h) $y = \frac{x^2}{3} - 4x$

2) Verifique se a função $y = (2x - 1)^2 - 4(x + 1)^2$ é uma função quadrática.

$y = -12x - 3$. Não é uma função quadrática.

3) Obter **m** na função $y = (m + 2)x^2 - 5x + 1$ para que seja quadrática.

Devemos ter $a \neq 0$. $m + 2 \neq 0 \Rightarrow m \neq -2$

REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DA FUNÇÃO DO 2º GRAU

Vamos atribuir a **x** valores quaisquer do conjunto dos números reais e calcular os correspondentes de y.

O gráfico da função quadrática, quando definida de IR em IR, é uma curva denominada **parábola,** como nos seguintes exemplos:

1 Seja a função definida por:

$$y = x^2 - 4x + 3$$

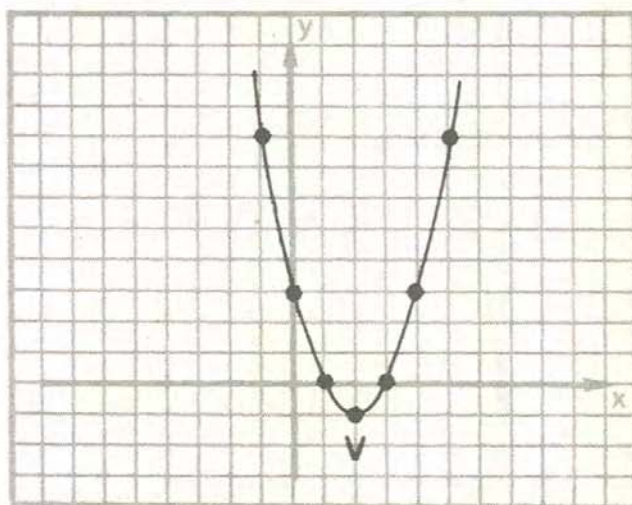
Solução:

Vamos atribuir a **x** os valores – 1, 0, 1, 2, 3, 4 e 5 e calcular os valores de **y.**

x	$y = x^2 - 4x + 3$	(x, y)
– 1	$y = (-1)^2 - 4 \cdot (-1) + 3 = 8$	(– 1, 8)
0	$y = (0)^2 - 4 \cdot (0) + 3 = 3$	(0, 3)
1	$y = (1)^2 - 4 \cdot (1) + 3 = 0$	(1, 0)
2	$y = (2)^2 - 4 \cdot (2) + 3 = -1$	(2, – 1)
3	$y = (3)^2 - 4 \cdot (3) + 3 = 0$	(3, 0)
4	$y = (4)^2 - 4 \cdot (4) + 3 = 3$	(4, 3)
5	$y = (5)^2 - 4 \cdot (5) + 3 = 8$	(5, 8)

A seguir:

1º) Marcamos os pontos no gráfico.

2º) Traçamos a curva.

O ponto V indicado na figura chama-se **vértice** da parábola.

2 Seja a função definida por:

$$y = -x^2 + 6x - 8$$

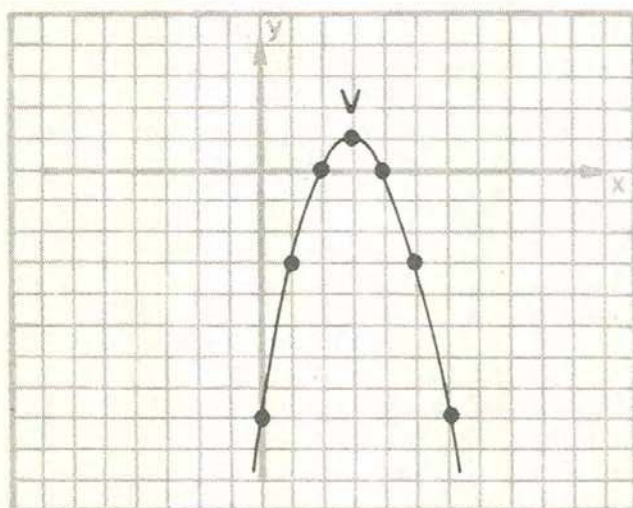
Solução:

Vamos atribuir a **x** os valores 0, 1, 2, 3, 4, 5 e 6 e calcular os valores de **y.**

x	$y = -x^2 + 6x - 8$	(x, y)
0	$y = -(0)^2 + 6(0) - 8 = -8$	(0, −8)
1	$y = -(1)^2 + 6(1) - 8 = -3$	(1, −3)
2	$y = -(2)^2 + 6(2) - 8 = 0$	(2, 0)
3	$y = -(3)^2 + 6(3) - 8 = 1$	(3, 1)
4	$y = -(4)^2 + 6(4) - 8 = 0$	(4, 0)
5	$y = -(5)^2 + 6(5) - 8 = -3$	(5, −3)
6	$y = -(6)^2 + 6(6) - 8 = -8$	(6, −8)

A seguir:

1º) Marcamos os pontos no gráfico.

2º) Traçamos a curva.

O ponto V indicado na figura é o **vértice** da parábola.

❸ Seja a função definida por:

$$y = x^2 - 2x + 1$$

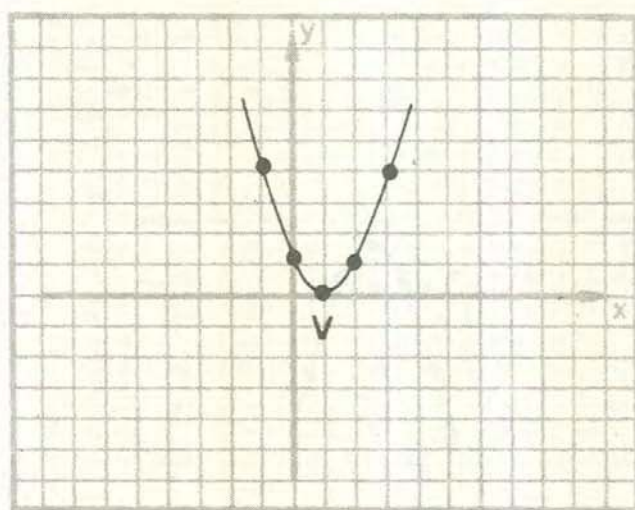
Solução:

Atribuindo-se valores para **x**, obteremos valores correspondentes para **y**.

Veja:

x	$y = x^2 - 2x + 1$	(x, y)
− 1	$y = (-1)^2 - 2 \cdot (-1) + 1 = 4$	(− 1, 4)
0	$y = (0)^2 - 2 \cdot (0) + 1 = 1$	(0, 1)
1	$y = (1)^2 - 2 \cdot (1) + 1 = 0$	(1, 0)
2	$y = (2)^2 - 2 \cdot (2) + 1 = 1$	(2, 1)
3	$y = (3)^2 - 2 \cdot (3) + 1 = 4$	(3, 4)

A seguir:

1º) Marcamos os pontos no gráfico.
2º) Traçamos a curva.

O ponto V indicado na figura é o **vértice** da parábola.

4 Seja a função definida por:

$$y = -x^2 + 2x - 2$$

Solução:

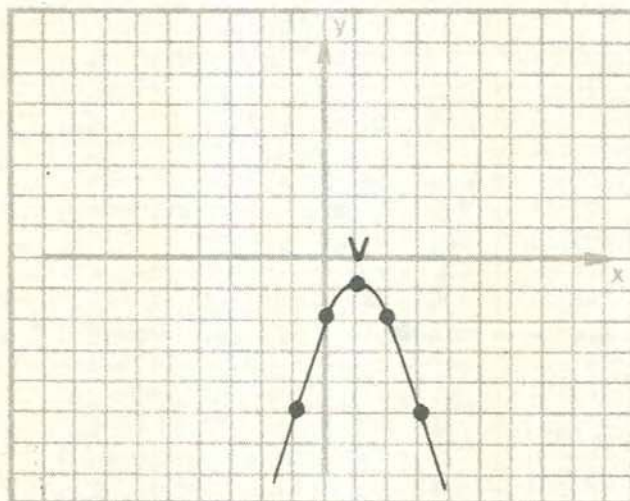
Atribuindo-se valores para **x**, obteremos valores correspondentes para **y**.

Veja:

x	$y = -x^2 + 2x - 2$	(x, y)
−1	$y = -(-1)^2 + 2 \cdot (-1) - 2 = -5$	(−1, −5)
0	$y = -(0)^2 + 2 \cdot (0) - 2 = -2$	(0, −2)
1	$y = -(1)^2 + 2 \cdot (1) - 2 = -1$	(1, −1)
2	$y = -(2)^2 + 2 \cdot (2) - 2 = -2$	(2, −2)
3	$y = -(3)^2 + 2 \cdot (3) - 2 = -5$	(3, −5)

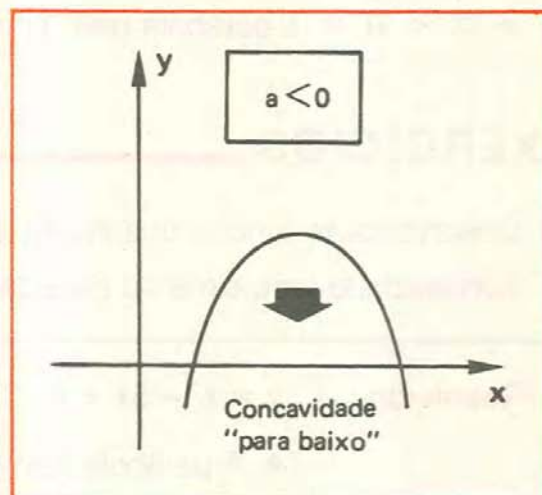
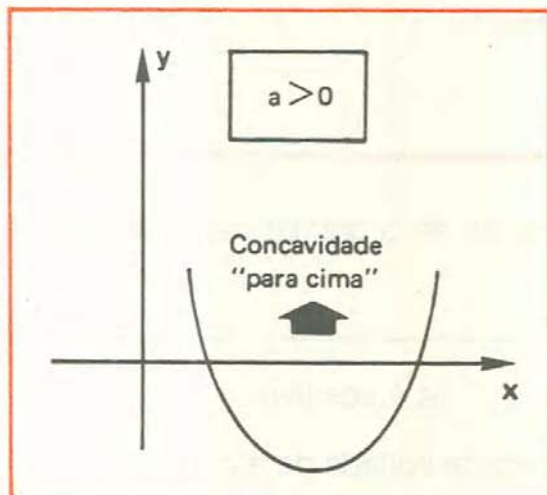
A seguir:

1º) Marcamos os pontos no gráfico.

2º) Traçamos a curva.

O ponto V indicado na figura é o **vértice** da parábola.

CARACTERÍSTICAS DA FUNÇÃO QUADRÁTICA

a) **Quanto à concavidade da parábola:**

- $a > 0 \Rightarrow$ concavidade voltada para "cima" *(exemplos ❶ e ❸).*
- $a < 0 \Rightarrow$ concavidade voltada para "baixo" *(exemplos ❷ e ❹).*

b) **Quanto às coordenadas do vértice:**

- Se $a > 0 \Rightarrow$ o vértice é ponto de mínimo (ponto "mais baixo").
- Se $a < 0 \Rightarrow$ o vértice é ponto de máximo (ponto "mais alto").

- A abscissa do vértice pode ser obtida com o uso da fórmula:

$$x_v = \frac{-b}{2a}$$

- O valor da ordenada do vértice da parábola é obtido atribuindo-se o valor de de x_v à variável x da função dada.

Exemplo:

Vamos determinar o vértice da função $y = x^2 - 4x + 3$

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{2 \cdot 1} = \frac{4}{2} = 2$$

$$V(2, -1)$$

$$y_v = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = 4 - 8 + 3 = -1$$

Resposta: As coordenadas do vértice são $(2, -1)$.

c) **Quanto ao** $\Delta = b^2 - 4ac$ **(discriminante):**

- $\Delta > 0 \Rightarrow$ a parábola "corta" o eixo **x** em **dois pontos.**
- $\Delta = 0 \Rightarrow$ a parábola tangencia o eixo **x** em **um ponto.**
- $\Delta < 0 \Rightarrow$ a parábola **não** "corta" o eixo **x.**

EXERCÍCIOS

1) Observe cada função quadrática e responda se o gráfico da parábola tem concavidade para cima ou para baixo.

Resolvido. $y = x^2 - 5x + 6$ (a é positivo)

- A parábola tem concavidade voltada para cima.

a) $y = x^2 - 4x + 3$ *"para cima"*

b) $y = -x^2 + 3x - 2$ *"para baixo"*

c) $y = 2x^2 - 8x + 8$ *"para cima"*

d) $y = x^2 - 4$ *"para cima"*

e) $y = -x^2 - 3x$ *"para baixo"*

f) $y = -3x^2 + 6x - 5$ *"para baixo"*

2) Dada a função $y = x^2 - 4x + 3$, complete a tabela e esboce o seu gráfico.

x	−1	0	1	2	3	4	5
y	8	3	0	−1	0	3	8

3) Dada a função $y = -x^2 + 4x$, complete a tabela e esboce o seu gráfico.

x	−1	0	1	2	3	4	5
y	−5	0	3	4	3	0	−5

4) Dada a função $y = -x^2 + 2x - 1$, complete a tabela e esboce o seu gráfico.

x	−2	−1	0	1	2	3	4
y	−9	−4	−1	0	−1	−4	−9

5) Dada a função $y = x^2 + 2x + 2$, complete a tabela e esboce o seu gráfico.

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2
y	10	5	2	1	2	5	10

6) Represente graficamente as funções quadráticas:

a) $y = x^2 - 3x + 2$

b) $y = -x^2 + 4x - 3$

c) $y = x^2 - 4x + 4$

d) $y = -x^2 + 6x - 9$

e) $y = x^2 - x + 2$

f) $y = x^2 - 4$

g) $y = -x^2 + 9$

h) $y = x^2 - 3x$

i) $y = x^2 - 2x - 8$

j) $y = 2x^2$

ZEROS DA FUNÇÃO QUADRÁTICA

Os **zeros** da função quadrática $y = ax^2 + bx + c$ são os valores de **x** para os quais $y = 0$.

Então:

Achar os zeros da função quadrática equivale a resolver a equação do 2º grau:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$$

Exemplos:

1 Dada a função $y = x^2 - 5x + 6$:

a) Obtenha os zeros da função.

b) Com os zeros obtidos esboce o gráfico da função.

Solução:

a) Fazendo $y = 0$, temos: $x^2 - 5x + 6 = 0$

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6$$

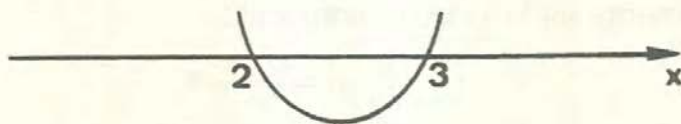
$$\Delta = 25 - 24$$

$$\Delta = 1$$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 1}{2} \quad \begin{cases} x' = \dfrac{6}{2} = 3 \\ x'' = \dfrac{4}{2} = 2 \end{cases}$$

Os zeros da função são 2 e 3.

b) Esboço.

- $a = 1$ (positivo) $\Rightarrow$ a parábola tem a concavidade voltada para cima.
- $\Delta = 1$ $(\Delta > 0)$ $\Rightarrow$ a parábola "corta" o eixo x em dois pontos.

2 Dada a função $y = -x^2 + 6x - 9$:

a) Obtenha os zeros da função.

b) Com os zeros obtidos esboce o gráfico da função.

Solução:

a) Fazendo $y = 0$, temos: $-x^2 + 6x - 9 = 0$

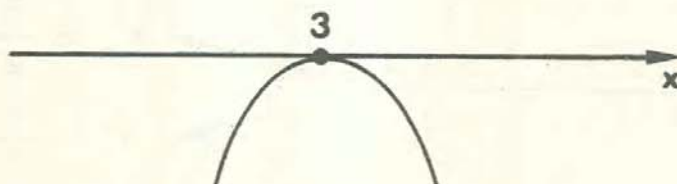
$$\Delta = 6^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-9)$$

$$\Delta = 36 - 36$$

$$\Delta = 0$$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{0}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-6 \pm 0}{-2} \begin{cases} x' = \dfrac{-6}{-2} = 3 \\ x'' = \dfrac{-6}{-2} = 3 \end{cases}$$

b) Esboço.

- $a = -1$ (negativo) $\Rightarrow$ a parábola tem a concavidade voltada para baixo.
- $\Delta = 0$ $\Rightarrow$ a parábola tangencia o eixo x em um ponto.

3 Dada a função $y = x^2 - 2x + 5$:

a) Obtenha os zeros da função.

b) Com os zeros obtidos esboce o gráfico da função.

Solução:

a) Fazendo $y = 0$, temos: $x^2 - 2x + 5 = 0$

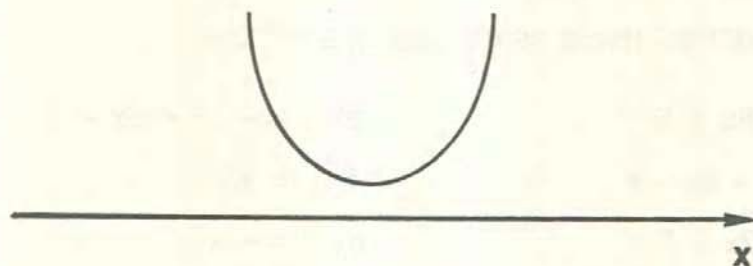
$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5$

$\Delta = 4 - 20$

$\Delta = -16$

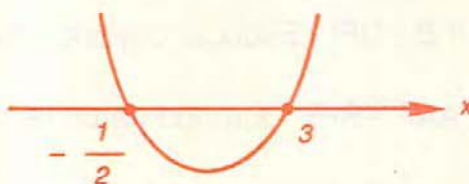
A função **não** tem zeros.

b) Esboço.

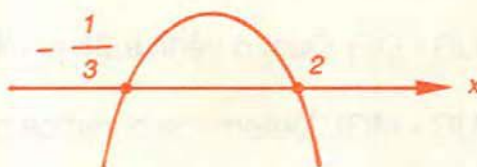
- $a = 1$ (positivo) $\Rightarrow$ a parábola tem a concavidade voltada para cima.
- $\Delta = -16$ ($\Delta < 0$) $\Rightarrow$ a parábola não "corta" o eixo x.

EXERCÍCIOS

1) Dada a função $y = 2x^2 - 5x - 3$:

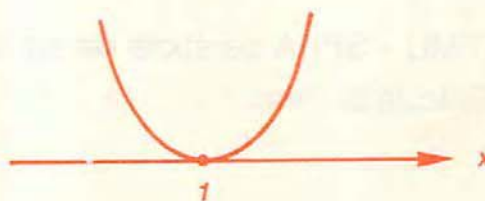
a) Obtenha os zeros da função.

b) Esboce o gráfico da função.

2) Dada a função $y = -3x^2 + 5x + 2$:

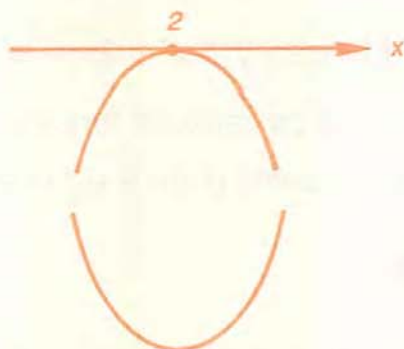
a) Obtenha os zeros da função.

b) Esboce o gráfico da função.

3) Dada a função $y = x^2 - 2x + 1$:

a) Obtenha os zeros da função.

b) Esboce o gráfico da função.

4) Dada a função $y = -x^2 + 4x - 4$:

a) Obtenha os zeros da função.

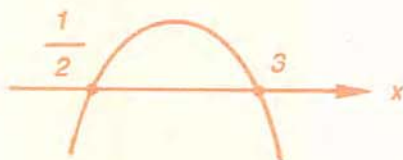
b) Esboce o gráfico da função.

5) Dada a função $y = x^2 + 1$:

a) Obtenha os zeros da função.

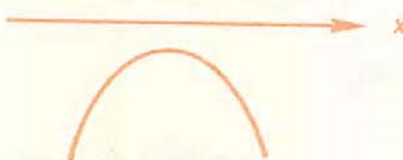
b) Esboce o gráfico da função.

6) Dada a função $y = -2x^2 + 7x - 3$:

a) Obtenha os zeros da função.

b) Esboce o gráfico da função.

7) Dada a função $y = -x^2 + 4x - 5$:

a) Obtenha os zeros da função.

b) Esboce o gráfico da função.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1) Represente graficamente as funções quadráticas:

a) $y = x^2 - 6x + 5$

b) $y = -x^2 + 4x - 4$

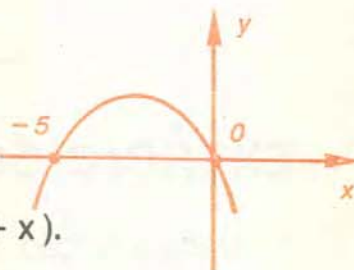
c) $y = x^2 - 2x + 5$

d) $y = x^2 - 6x + 9$

e) $y = -x^2 + 6x - 5$

f) $y = x^2$

g) $y = -x^2$

h) $y = -x^2 + 6x - 9$

2) (UFB - DF) Esboçar o gráfico da função $y = 4x^2 - 5x(1 + x)$.

3) (FAAP - SP) Que tipo de curva representa a função $y = tx^2 + x + 1$ se:

a) $t = 0$ *(reta)*

b) $t \neq 0$ *(parábola)*

4) (UB - DF) Qual o vértice da parábola $y = 4 - x^2$? *V(0, 4)*

5) (UC - MG) Determine o vértice da parábola da equação $y = -x^2 + 2x + 2$.
V(1, 3)

6) (CESGRANRIO - RJ) Qual a ordenada do vértice da parábola $y = x^2 - 2x + 5$?
Resp.: 4

7) (FMU - SP) A parábola da equação $y = -x^2 + bx - 8$ é tangente ao eixo x. Calcule b. *Resp.: $4\sqrt{2}$ ou $-4\sqrt{2}$*

TESTES

1) A função quadrática $y = (m - 1)x^2 + 2x + 3$ está definida quando:

■ a) $m \neq 1$
b) $m \neq 2$
c) $m \neq 3$
d) $m \neq 4$

Devemos ter $a \neq 0$
Logo: $m - 1 \neq 0$
$m \neq 1$

2) (PUC - SP) A função quadrática $y = (m^2 - 4)x^2 - (m + 2)x - 1$ está definida quando:

a) $m = 4$
b) $m \neq 4$
c) $m = \pm 2$
■ d) $m \neq \pm 2$

Devemos ter:
$m^2 - 4 \neq 0$
$m \neq \pm 2$

3) A função quadrática $y = (m - 5)x^2 + 3x - 2$ tem concavidade voltada para "cima" quando:

a) $m = 5$
■ b) $m > 5$
c) $m < 5$
d) $m > 3$

Condição: $a > 0$
Logo: $m - 5 > 0$
$m > 5$

4) A função quadrática $y = (2m - 1)x^2 + 5x - 1$ tem concavidade voltada para "baixo" quando:

a) $m > 1$
b) $m > \frac{1}{2}$
c) $m > 2$
■ d) $m < \frac{1}{2}$

Condição: $a < 0$
Logo:
$2m - 1 < 0 \Rightarrow m < \frac{1}{2}$

5) (PUC - SP) O gráfico da função quadrática $f(x) = x^2 + ax + 3$ passa pelo ponto P (1, 2). Logo:

a) $a = 1$
b) $a = 3$
c) $a = -1$
■ d) $a = -2$

$2 = 1^2 + a \cdot 1 + 3$
$a = -2$

6) (UF - PR) A parábola de equação $y = ax^2 + bx + c$ passa pelo ponto (1,0). Então $a + b + c$ é igual a:

■ a) 0
b) 2
c) 3
d) 5

$0 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c$
$a + b + c = 0$

7) (UF - PA) As coordenadas do vértice da função $y = x^2 - 2x + 1$ são:

a) (– 1,4)
b) (– 1, 1)
■ c) (1, 0)
d) (0, 1)

$x = \frac{-(-2)}{2 \cdot 1} = 1$
$y = 1^2 - 2 \cdot 1 + 1 = 0$

8) (OSEC - SP) Se o gráfico da função $y = ax^2 + bx + c$ (sendò a, b e c números reais) for tangente ao eixo dos x, então pode-se afirmar que:

a) $b^2 > 4ac$
b) $b^2 < 4ac$
c) $b = 4a + c$
■ d) $4ac = b^2$

9) (UF - ES) Sendo $y = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$ e $x \in \mathbb{R}$, considere $\Delta = b^2 - 4ac$. Não haverá a intersecção do gráfico de y com o eixo das abscissas quando:

a) $\Delta > 0$
■ b) $\Delta < 0$
c) $\Delta \geq 0$
d) a intersecção não depende de Δ

10) (UB - DF) Os valores que anulam a função $y = x^2 - 5x + 6$ são:

■ a) positivos
b) negativos
c) pares
d) ímpares

11) (PUC - SP) O esboço do gráfico da função quadrática $y = 2x^2 - 8x + 6$ é:

■ a)

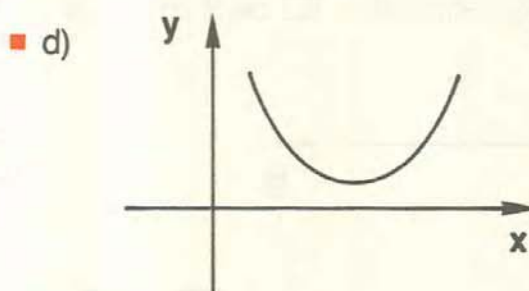
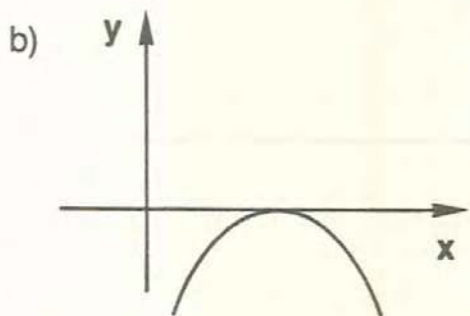
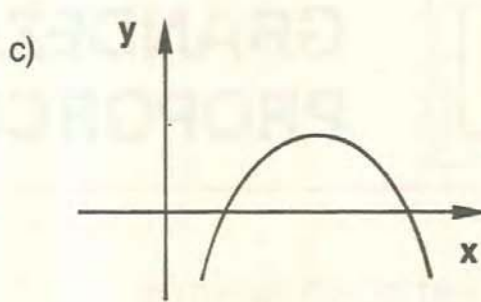
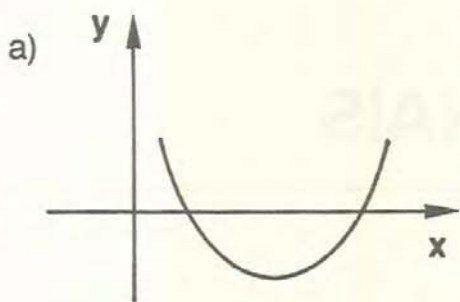
c)

b)

d)

12) (UF - CE) Qual a parábola abaixo que poderia representar uma função quadrática com discriminante negativo?

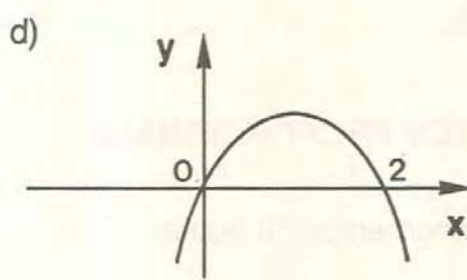
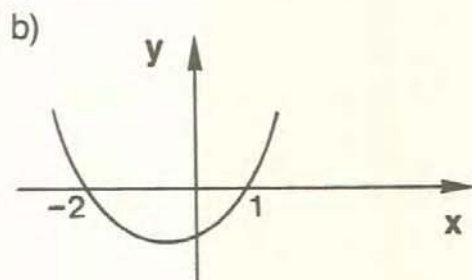
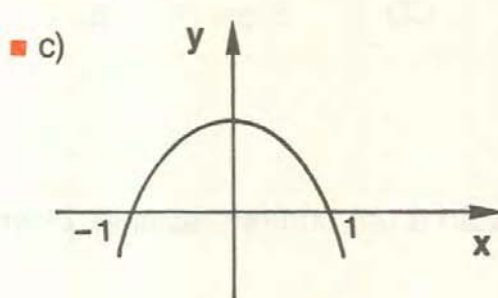
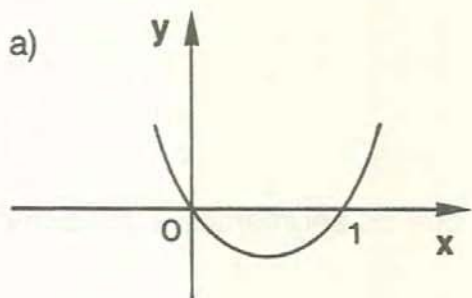
a) c)

b) ■ d)

13) (UB - DF) O esboço do gráfico da função $y = -x^2 + 1$ é:

a)

■ c)

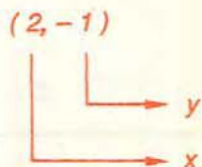
b)

d)

14) O valor de **m**, de modo que o ponto (2, – 1) pertença ao gráfico da função $y = x^2 - 4x + m$, é:

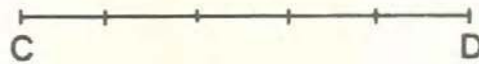
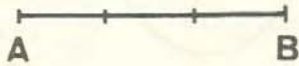
a) 1
b) 2
■ c) 3
d) 4

(2, – 1)
→ y
→ x

$-1 = 2^2 - 4 \cdot 2 + m$
$-1 = 4 - 8 + m$
$m = 3$

14

GRANDEZAS PROPORCIONAIS

RAZÃO ENTRE SEGMENTOS

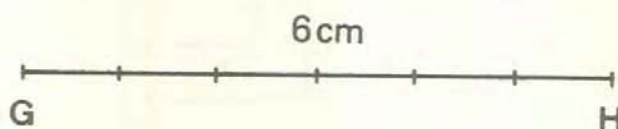
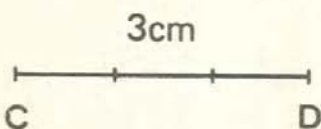
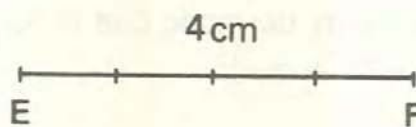
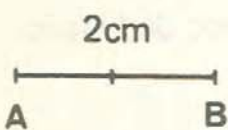
Sejam os segmentos $\overline{AB}$ de 3 cm e $\overline{CD}$ de 5 cm.

A razão entre os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ é:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{3\text{ cm}}{5\text{ cm}} = \frac{3}{5}$$

Nota:

- Se a razão é um número racional, dizemos que os segmentos são **comensuráveis.**
- Se a razão é um número irracional, dizemos que os segmentos são **incomensuráveis.**

SEGMENTOS PROPORCIONAIS

Sejam os segmentos da figura:

Os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{EF}$ e $\overline{GH}$, nesta ordem, são proporcionais.

Veja:

Verifique que as medidas dos quatro segmentos dados formam uma proporção.

Logo: $\frac{AB}{CD} = \frac{EF}{GH}$

EXERCÍCIOS

1) Determine a razão entre os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ que medem respectivamente:

a) 3 cm e 5 cm $\frac{3}{5}$

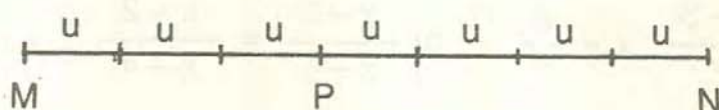
b) 6 cm e 12 cm $\frac{1}{2}$

c) 21 cm e 7 cm 3

d) 1 m e $\sqrt{3}$ m $\frac{\sqrt{3}}{3}$

e) $5\sqrt{2}$ m e $9\sqrt{2}$ m $\frac{5}{9}$

f) $2\sqrt{7}$ m e $\sqrt{2}$ m $\sqrt{14}$

2) Observe a figura abaixo, onde u é uma unidade de medida:

Calcule as razões entre os segmentos:

a) $\overline{MP}$ e $\overline{PN}$ $\frac{3}{4}$

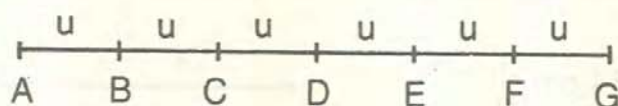
b) $\overline{PN}$ e $\overline{MN}$ $\frac{4}{7}$

c) $\overline{MP}$ e $\overline{MN}$ $\frac{3}{7}$

d) $\overline{PN}$ e $\overline{MP}$ $\frac{4}{3}$

3) Observe a figura abaixo e dê os valores das razões:

u u u u u u

A B C D E F G

a) $\frac{AB}{AG}$ $\frac{1}{6}$

b) $\frac{AC}{AG}$ $\frac{1}{3}$

c) $\frac{AB}{AC}$ $\frac{1}{2}$

d) $\frac{AE}{AC}$ 2

e) $\frac{AE}{AG}$ $\frac{2}{3}$

f) $\frac{AF}{AD}$ $\frac{5}{3}$

g) $\frac{AF}{AG}$ $\frac{5}{6}$

h) $\frac{AF}{AE}$ $\frac{5}{4}$

4) Determine x em cada uma das seguintes proporções:

Resolvido. $\frac{x-3}{4} = \frac{x}{5} \Rightarrow 5(x-3) = 4x$

$5x - 15 = 4x$

$5x - 4x = 15$

$x = 15$

a) $\frac{7}{3} = \frac{x}{12}$ $x = 28$

b) $\frac{2x}{15} = \frac{6}{9}$ $x = 5$

c) $\frac{6}{3} = \frac{x}{0,5}$ $x = 1$

d) $\frac{x+1}{5} = \frac{x}{3}$ $x = \frac{3}{2}$

e) $\frac{2}{9} = \frac{x+3}{x-1}$ $x = -\frac{29}{7}$

f) $\frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{x}{\sqrt{20}}$ $x = 5$

g) $\frac{1,2}{4,2} = \frac{2}{x}$ $x = 7$

h) $\frac{3}{5x} = \frac{6}{2\frac{1}{2}}$ $x = \frac{1}{4}$

5) Determine x em cada uma das seguintes proporções:

a) $\frac{2x-3}{2} = \frac{x+1}{6}$ $x = 2$

b) $\frac{x}{x-2} = \frac{x-3}{x}$ $x = \frac{6}{5}$

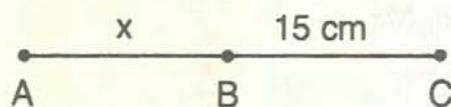
c) $\frac{x-2}{x-4} = \frac{x+3}{x-5}$ $x = \frac{11}{3}$

d) $\frac{x-3}{x-1} = \frac{x-2}{x-4}$ $x = \frac{5}{2}$

6) Observe a figura e determine a medida de x, sabendo que:

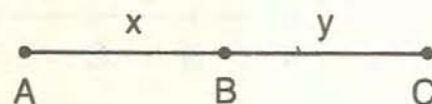
$\frac{AB}{BC} = \frac{2}{3}$ e BC = 15 cm

x 15 cm
A B C

$\frac{x}{15} = \frac{2}{3} \Rightarrow x = 10$ *Resp.: 10 cm.*

7) Observe a figura e determine as medidas de x e y, sabendo que:

$\frac{AB}{BC} = \frac{3}{4}$ e AC = 14 cm

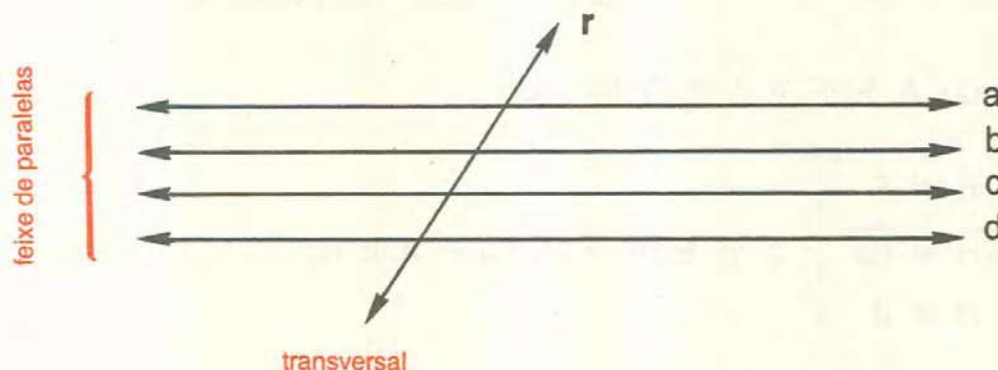
x y
A B C

$\frac{x}{14-x} = \frac{3}{4} \Rightarrow x = 6$ *Resp.: x = 6 cm e y = 8 cm.*

8) Os segmentos $\overline{AB}$ = 3 cm, $\overline{CD}$ = 5 cm, $\overline{EF}$ = 15 cm e $\overline{GH}$, nessa ordem, são proporcionais. Calcule $\overline{GH}$.

$\frac{AB}{CD} = \frac{EF}{GH} \Rightarrow \frac{3}{5} = \frac{15}{GH} \Rightarrow GH = 25$ *Resp.: 25 cm.*

FEIXE DE RETAS PARALELAS

Chama-se **feixe de paralelas** o conjunto de três ou mais retas paralelas de um plano.

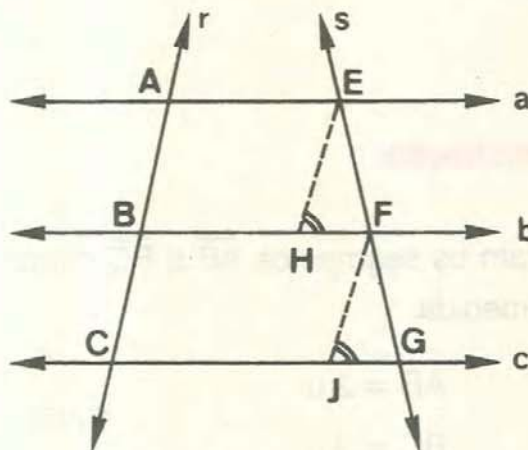
Se uma reta intercepta essas paralelas, ela se chama **transversal.**

Na figura, temos:

- as retas paralelas **a, b, c** e **d.**
- a reta transversal **r.**

Teorema

> Se um feixe de paralelas determina segmentos congruentes sobre uma transversal, então determinará segmentos congruentes sobre qualquer outra transversal.

$$H \begin{cases} a \parallel b \parallel c \\ r \text{ e } s \text{ transversais} \\ \overline{AB} \cong \overline{BC} \end{cases}$$

$$T \left\{ \overline{EF} \cong \overline{FG} \right.$$

Demonstração:

1) Traçando pelos pontos E e F os segmentos $\overline{EH}$ e $\overline{FJ}$ paralelos à reta r, temos:

$\overline{EH} \cong \overline{AB}$

$\overline{FJ} \cong \overline{BC}$ (ABHE e BCJF são paralelogramos)

2) Comparando $\triangle$ EHF e $\triangle$ FJG, temos:

$$\left.\begin{array}{l} \hat{E} \cong \hat{F} \\ \overline{EH} \cong \overline{FJ} \\ \hat{H} \cong \hat{J} \end{array}\right] \Rightarrow \triangle EHF \cong \triangle FJG \text{ (A. L. A.)}$$

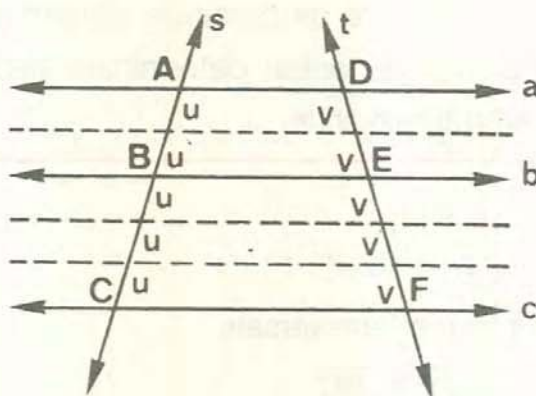
Então:

$\overline{EF} \cong \overline{FG}$

TEOREMA DE TALES

> Um feixe de paralelas determina sobre duas transversais segmentos proporcionais.

$$H \begin{cases} a \parallel b \parallel c \\ \text{s e t transversais} \end{cases}$$

$$T \left\{ \frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF} \right.$$

Demonstração:

1) Sejam os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ comensuráveis. Escolhemos o **u** como unidade de medida.

AB = 2 u

BC = 3 u

Então: $\frac{AB}{BC} = \frac{2}{3}$ ❶

2) Pelos pontos de divisão dos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, traçamos paralelas às retas do feixe. Essas paralelas dividem $\overline{DE}$ e $\overline{EF}$ em segmentos congruentes.

$DE = 2v$
$EF = 3v$

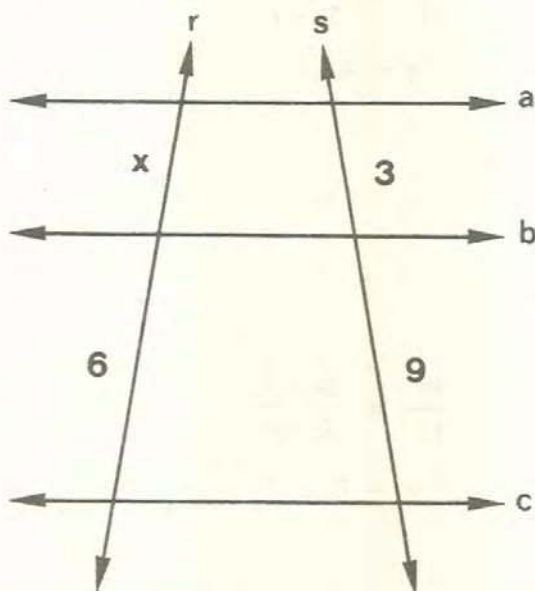
Então: $\frac{DE}{EF} = \frac{2}{3}$ ❷

Comparando ❶ e ❷, temos:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

Calcular o valor de x nos feixes de paralelas (a ∥ b ∥ c):

❶

Solução:

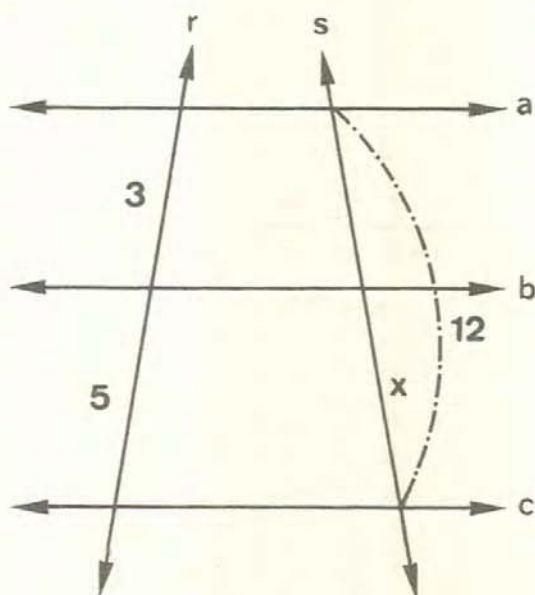
Pelo teorema de Tales:

$$\frac{x}{6} = \frac{3}{9}$$

$9x = 18$

$$x = \frac{18}{9}$$

$x = 2$

❷

Solução:

Pelo teorema de Tales:

$$\frac{3}{5} = \frac{12 - x}{x}$$

$3x = 5(12 - x)$

$3x = 60 - 5x$

$8x = 60$

$$x = \frac{60}{8}$$

$x = 7{,}5$

EXERCÍCIOS

1) Nas figuras, calcule x, sabendo que a // b // c:

a)

$\frac{3}{4} = \frac{x}{8}$

$x = 6$

b)

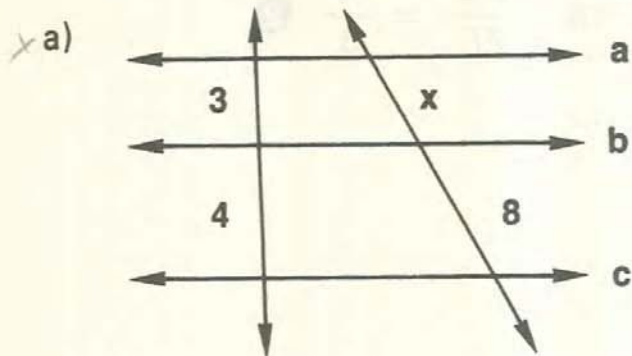
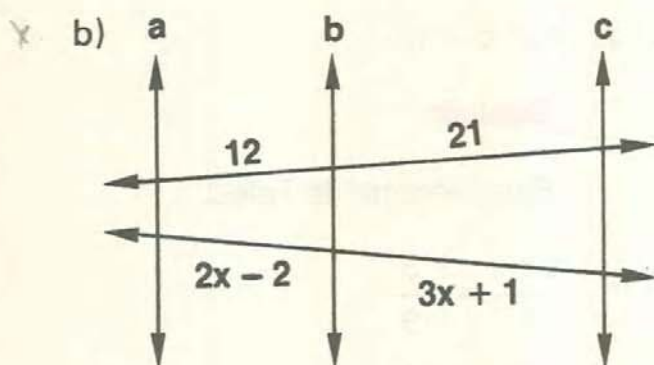
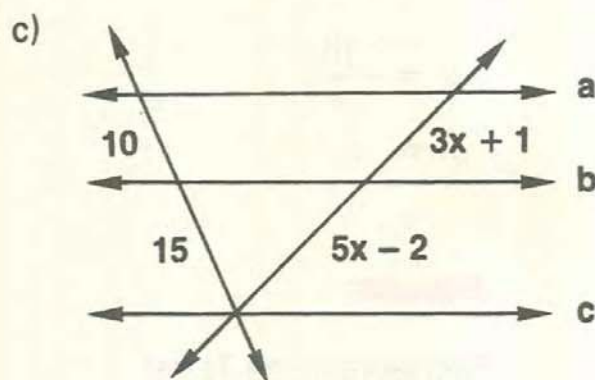
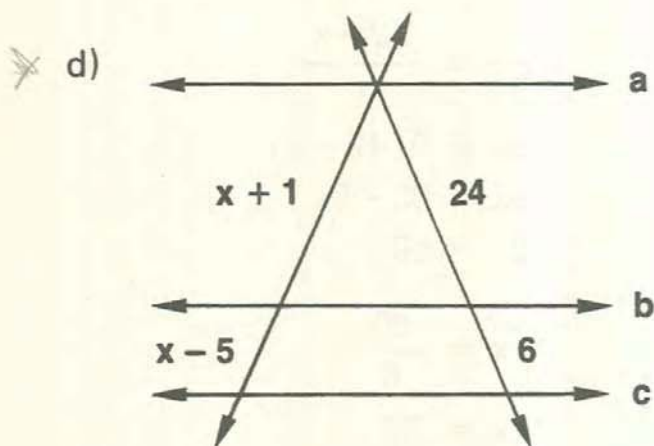
$\frac{12}{21} = \frac{2x-2}{3x+1}$

$x = 9$

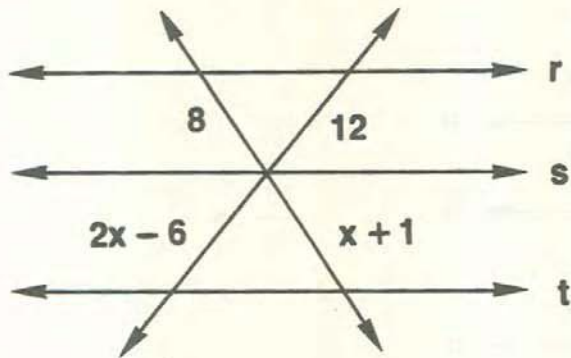
c)

$\frac{10}{15} = \frac{3x+1}{5x-2}$

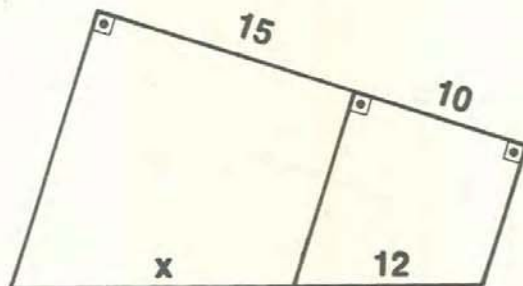
$x = 7$

d)

$\frac{x+1}{x-5} = \frac{24}{6}$

$x = 7$

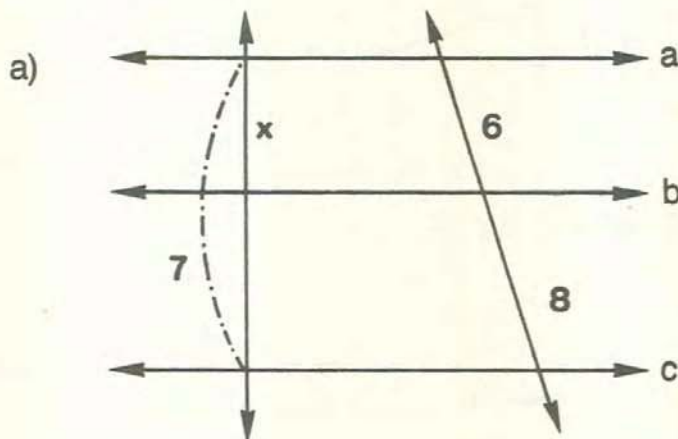
2) Calcule x, sabendo que r // s // t:

$$\frac{8}{x+1} = \frac{12}{2x-6}$$

$x = 15$

3) Calcule x:

$$\frac{x}{12} = \frac{15}{10}$$

$x = 18$

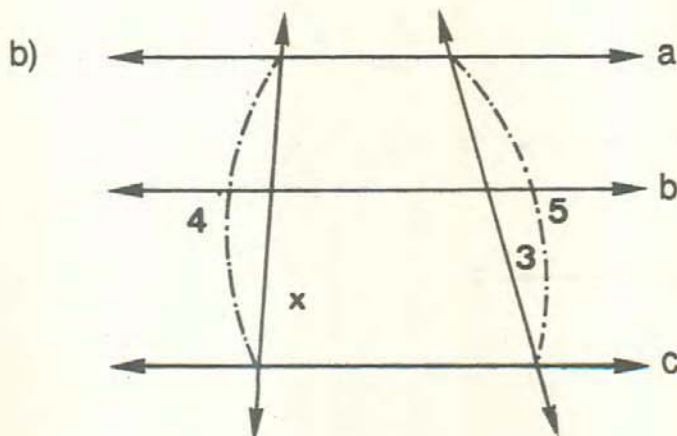
4) Nas figuras, calcule x, sabendo que a // b // c:

a)

$$\frac{x}{7-x} = \frac{6}{8}$$

$8x = 6(7-x)$

$14x = 42$

$x = 3$

b)

$$\frac{4-x}{x} = \frac{2}{3}$$

$2x = 3(4-x)$

$5x = 12$

$x = 2{,}4$

5) Nas figuras, calcule x e y, sabendo que a // b // c // d:

a)

$\frac{4}{10} = \frac{2}{x} \Rightarrow x = 5$

$\frac{10}{12} = \frac{5}{y} \Rightarrow y = 6$

b)

a) $\frac{y}{6} = \frac{10}{3}$

$y = 20$

b) $\frac{3}{x} = \frac{6}{4}$

$x = 2$

6) Na figura, calcule x e y, sabendo que a // b // c:

Pelo ponto de intersecção das transversais, devemos traçar d // a // b // c:

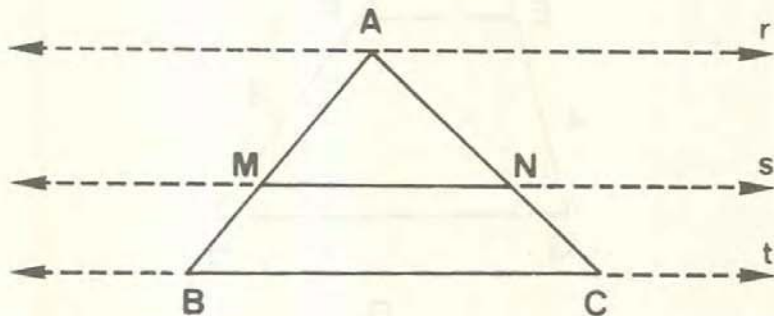
$\frac{4}{2} = \frac{6}{x} \Rightarrow x = 3$

$\frac{4}{y} = \frac{6}{5} \Rightarrow y = \frac{10}{3}$

TEOREMA

> Toda reta paralela a um dos lados de um triângulo determina, sobre os outros dois lados, segmentos proporcionais.

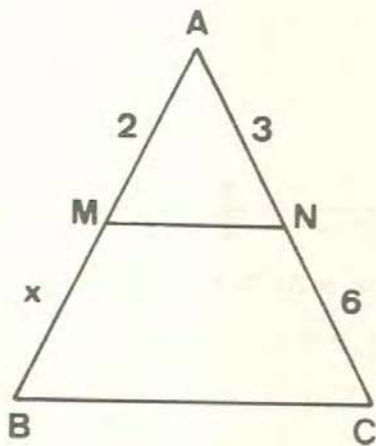
H $\{ \overline{MN} /\!\!/ \overline{BC}$

T $\left\{ \dfrac{AM}{MB} = \dfrac{AN}{NC} \right.$

Demonstração:

Traçamos pelo vértice A uma reta r paralela ao lado $\overline{BC}$.
Temos um feixe de paralelas, e pelo teorema de Tales:

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

Calcular o valor de x, sabendo que $\overline{MN} /\!\!/ \overline{BC}$.

Solução:

$$\frac{2}{x} = \frac{3}{6} \Rightarrow 3 \cdot x = 2 \cdot 6$$

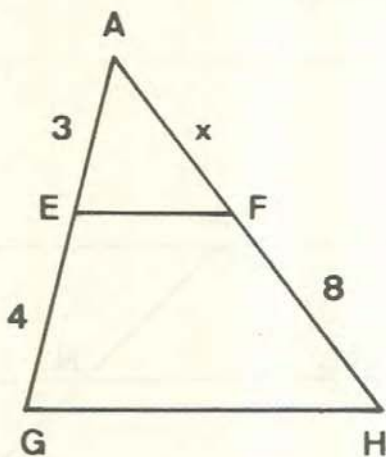
$$3x = 12$$

$$x = \frac{12}{3}$$

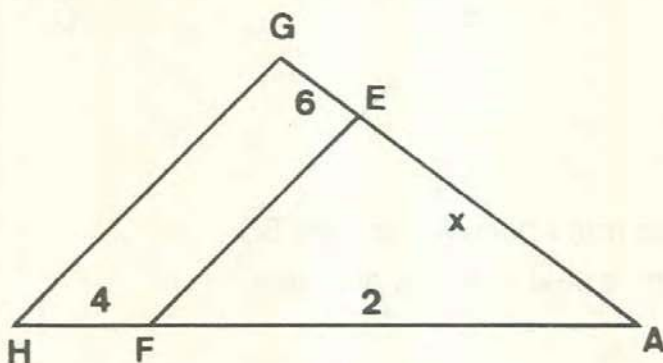
$$x = 4$$

EXERCÍCIOS

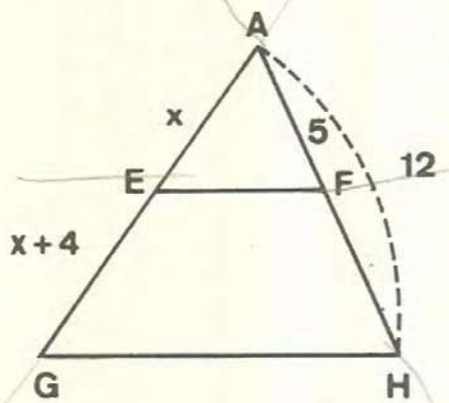
1) Calcule o valor de x, sabendo que $\overline{EF} \parallel \overline{GH}$:

a)

$$\frac{3}{4} = \frac{x}{8}$$

$x = 6$

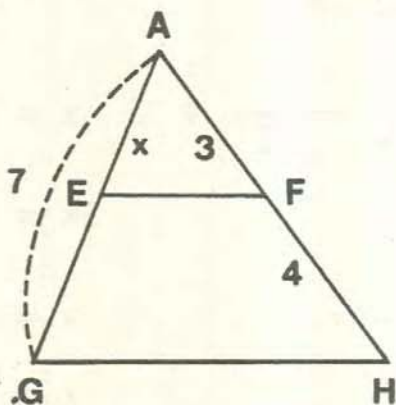
b)

$$\frac{6}{x} = \frac{4}{2}$$

$x = 3$

c)

$$\frac{x}{x+4} = \frac{5}{7}$$

$7x = 5\,(x+4)$

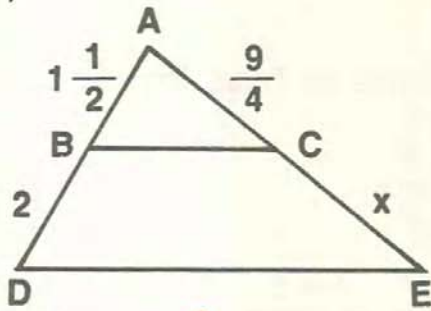
$x = 10$

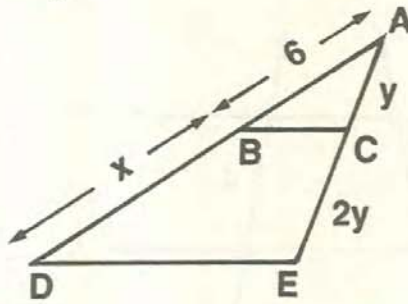
d)

$$\frac{x}{7-x} = \frac{3}{4}$$

$4x = 3(7-x)$

$x = 3$

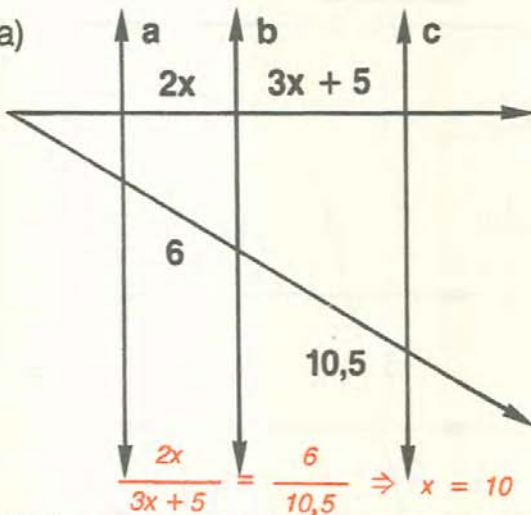
2) Calcule o valor de x, sabendo que $\overline{BC} \mathbin{/\!/} \overline{DE}$.

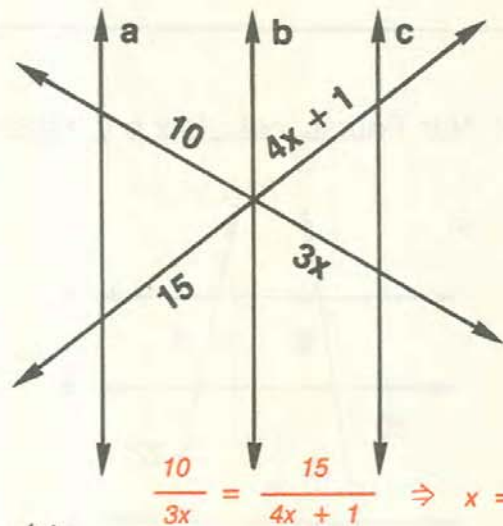
a)

$$\frac{\frac{3}{2}}{2} = \frac{\frac{9}{4}}{x} \Rightarrow x = 3$$

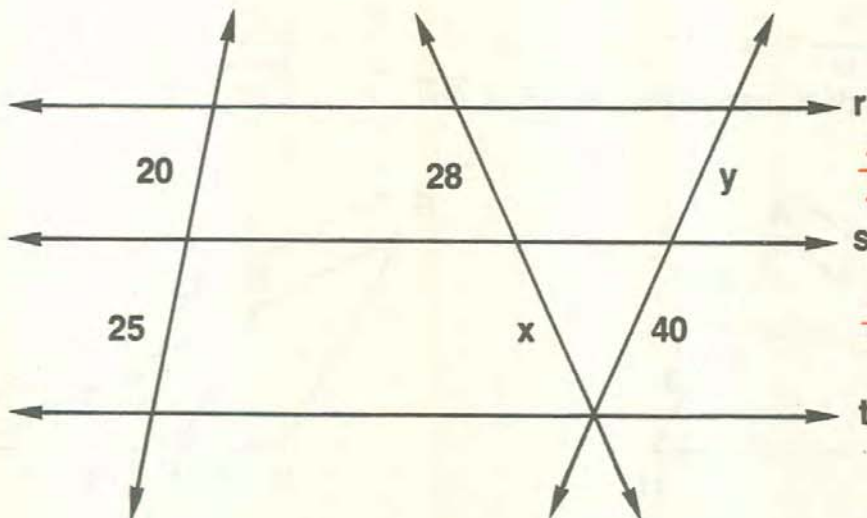
b)

$$\frac{6}{x} = \frac{y}{2y} \Rightarrow \frac{6}{x} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 12$$

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1) Nas figuras, calcule x, sabendo que $a \mathbin{/\!/} b \mathbin{/\!/} c$:

a)

$$\frac{2x}{3x+5} = \frac{6}{10,5} \Rightarrow x = 10$$

b)

$$\frac{10}{3x} = \frac{15}{4x+1} \Rightarrow x = 2$$

2) Na figura, calcule x e y, sabendo que $r \mathbin{/\!/} s \mathbin{/\!/} t$:

$$\frac{20}{25} = \frac{28}{x} \Rightarrow x = 35$$

$$\frac{28}{35} = \frac{y}{40} \Rightarrow y = 32$$

3) Na figura, calcule x e y, sabendo que r ∥ s ∥ t:

Solução:

Pelo teorema de Tales, temos:

$$\frac{x}{y} = \frac{4}{5}$$

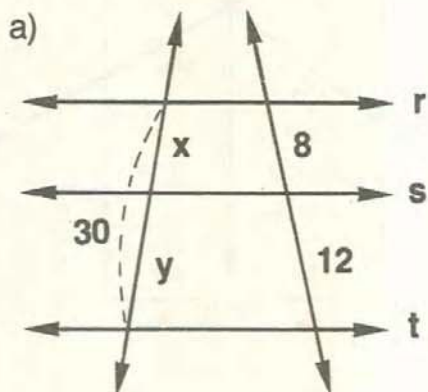
$$\frac{x + y}{y} = \frac{4 + 5}{5}$$

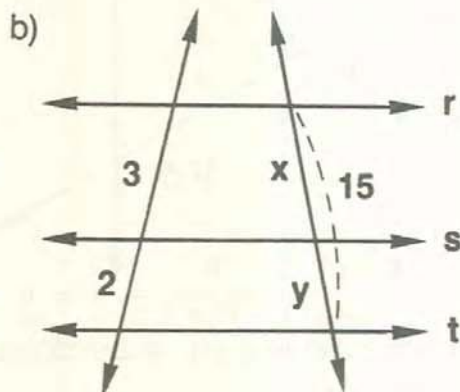
$$\frac{18}{y} = \frac{9}{5} \Rightarrow \boxed{y = 10}$$

Então: $x = 18 - 10$

$$\boxed{x = 8}$$

4) Nas figuras, calcule x e y, sabendo que r ∥ s ∥ t:

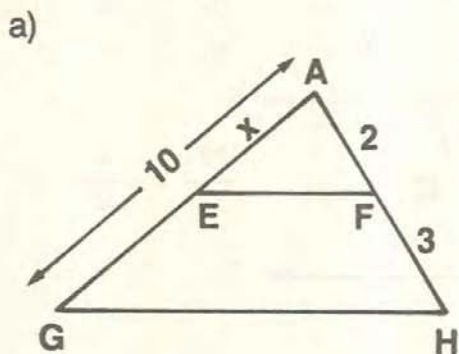
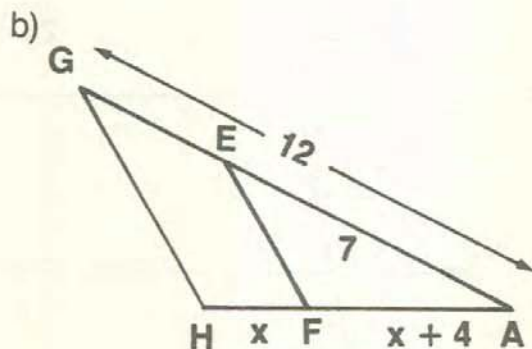
a)

$\frac{x}{30 - x} = \frac{8}{12} \Rightarrow x = 12$ *Logo: y = 18*

b)

$\frac{3}{2} = \frac{x}{15 - x} \Rightarrow x = 9$ *Logo: y = 6*

5) Calcule o valor de x, sabendo que $\overline{EF} \parallel \overline{GH}$:

a)

$\frac{x}{10 - x} = \frac{2}{3} \Rightarrow x = 4$

b)

$\frac{x}{x + 4} = \frac{5}{7} \Rightarrow x = 10$

TESTES

1) Os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{PQ}$ e $\overline{RS}$ formam nessa ordem uma proporção. Sabendo-se que AB = 5 cm, CD = 6 cm e PQ = 35 cm, então a medida de RS é:

a) 40 cm
■ b) 42 cm
c) 48 cm
d) 54 cm

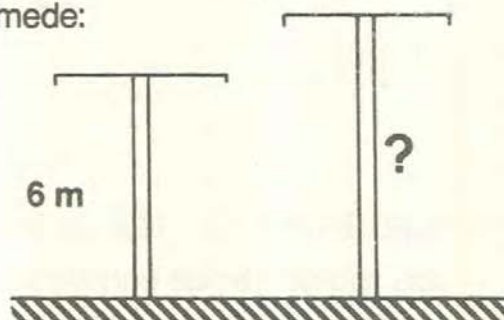
$\frac{AB}{CD} = \frac{PQ}{RS} \Rightarrow \frac{5}{6} = \frac{35}{RS} \Rightarrow RS = 42$

2) As alturas de dois postes estão entre si assim como 3 está para 5. Sabendo que o menor deles mede 6 m, então o maior mede:

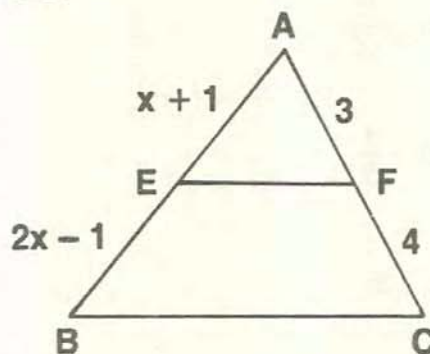
■ a) 10 m
b) 12 m
c) 15 m
d) 18 m

$\frac{6}{x} = \frac{3}{5}$

$3x = 30$

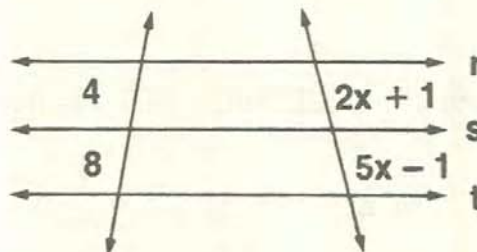
$x = 10$

3) Na figura abaixo $\overline{EF} \mathbin{/\!/} \overline{BC}$. Então, o valor de x é:

a) 2
b) 7
■ c) $\frac{7}{2}$
d) $\frac{2}{7}$

$\frac{x+1}{2x-1} = \frac{3}{4}$

4) Na figura abaixo, as retas r, s e t são paralelas. Então, o valor de x é:

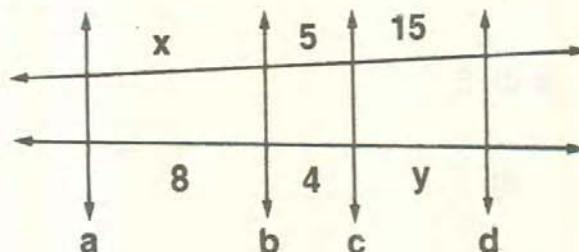
a) 2
■ b) 3
c) 4
d) 5

$\frac{4}{8} = \frac{2x+1}{5x-1}$

$x = 3$

5) Na figura abaixo a $/\!/$ b $/\!/$ c $/\!/$ d. Os valores respectivos de x e y são:

a) 8 e 12
b) 8 e 10
■ c) 10 e 12
d) 12 e 10

$\frac{x}{5} = \frac{8}{4} \Rightarrow x = 10$

$\frac{5}{15} = \frac{4}{y} \Rightarrow y = 12$

6) (F. Alfenas - MG) Na figura $\alpha = \beta$. Quanto vale x ?

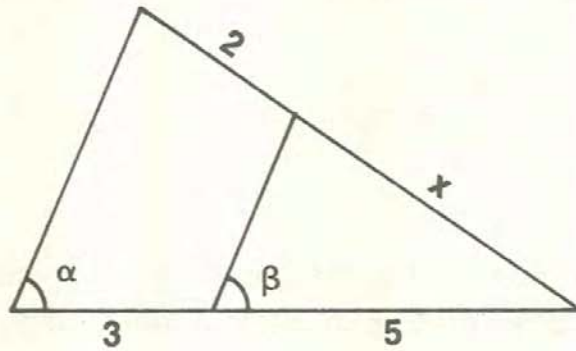
a) $\dfrac{5}{3}$

$\dfrac{3}{5} = \dfrac{2}{x}$

$x = \dfrac{10}{3}$

b) $\dfrac{3}{10}$

■ c) $\dfrac{10}{3}$

d) 10

7) (CESGRANRIO - RJ) As retas r_1, r_2, e r_3 são paralelas e os comprimentos dos segmentos de transversais são indicados na figura. Então x é igual a:

a) $\dfrac{15}{2}$

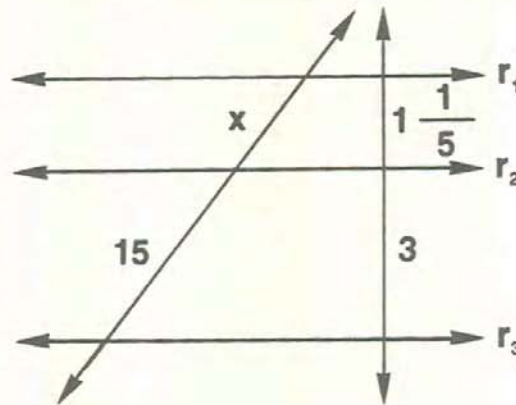
$\dfrac{x}{15} = \dfrac{\frac{6}{5}}{3}$

b) $\dfrac{8}{5}$

$3x = 18$

$x = 6$

c) 5

■ d) 6

8) (F. OBJETIVO - SP) Na figura abaixo, o valor de x é:

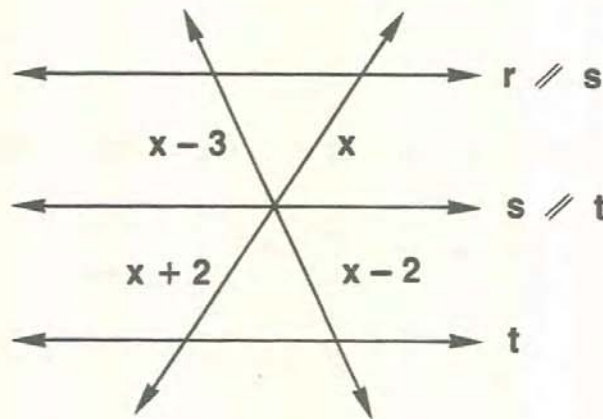
a) 4

$\dfrac{x-3}{x-2} = \dfrac{x}{x+2}$

b) 5

$x = 6$

 c) 6

d) 7

9) (ETI - SP) Nos triângulos abaixo, $PQ \,/\!/\, BC$. Assim, podemos afirmar que:

■ a) AC = 10

b) AC = 6

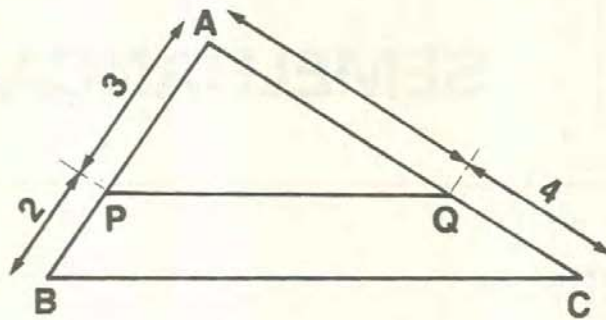
c) AQ = 10

d) AQ = 5

$\frac{3}{2} = \frac{AQ}{4}$

$AQ = 6$

Então:

$AC = 10$

10) Na figura abaixo $\overline{DE} \,/\!/\, \overline{FG}$. Então, o valor de x é:

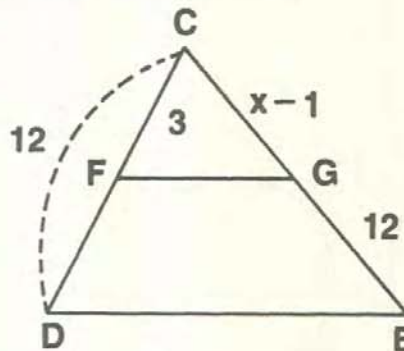
■ a) 5

b) 6

c) 7

d) 8

$\frac{3}{9} = \frac{x-1}{12}$

$x = 5$

11) No triângulo abaixo $\overline{MN} \,/\!/\, \overline{EF}$. Se $x + y = 16$, então o valor de x é:

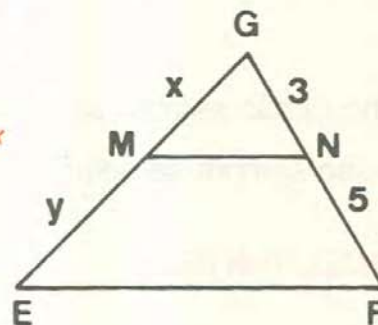
a) 5

■ b) 6

c) 7

d) 8

$\begin{cases} x + y = 16 \\ \frac{x}{y} = \frac{3}{5} \Rightarrow y = \frac{5}{3}x \end{cases}$

$x + \frac{5}{3}x = 16 \Rightarrow x = 6$

12) (PUC - SP) No triângulo ABC desenhado abaixo, o segmento y vale:

a) 5 cm

■ b) 15 cm

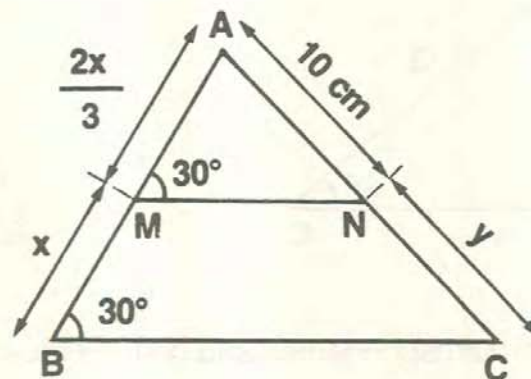
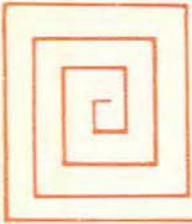
c) 10 cm

d) 2 cm

$\frac{\frac{2x}{3}}{x} = \frac{10}{y}$

$\frac{2}{3} = \frac{10}{y}$

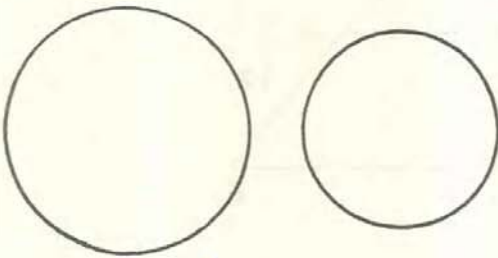
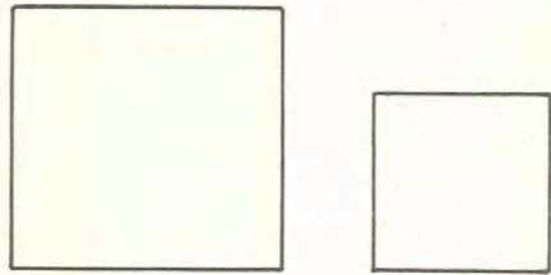
$y = 15$

15

SEMELHANÇA

CONCEITO

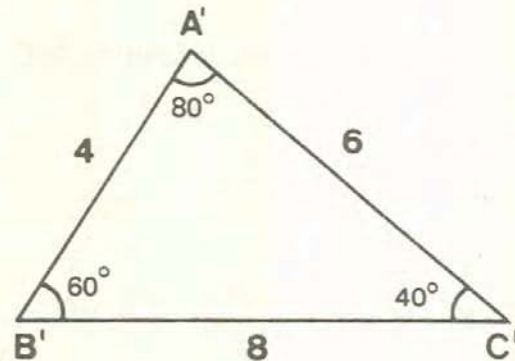
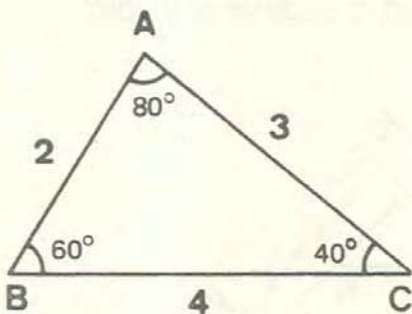
Duas figuras são **semelhantes** se tiverem a mesma forma (não importa o tamanho).

Exemplos:

a)

b)

Dizemos que:

- Duas circunferências são sempre semelhantes.
- Dois quadrados são sempre semelhantes.

TRIÂNGULOS SEMELHANTES

Sejam os triângulos:

Observe que:

- Os ângulos correspondentes são congruentes.
- Os lados correspondentes são proporcionais.

Os triângulos ABC e A'B'C' são **semelhantes.**
Indicamos $\triangle$ ABC ~ $\triangle$ A'B'C' (significa que $\triangle$ABC é semelhante ao $\triangle$A'B'C').

Então:

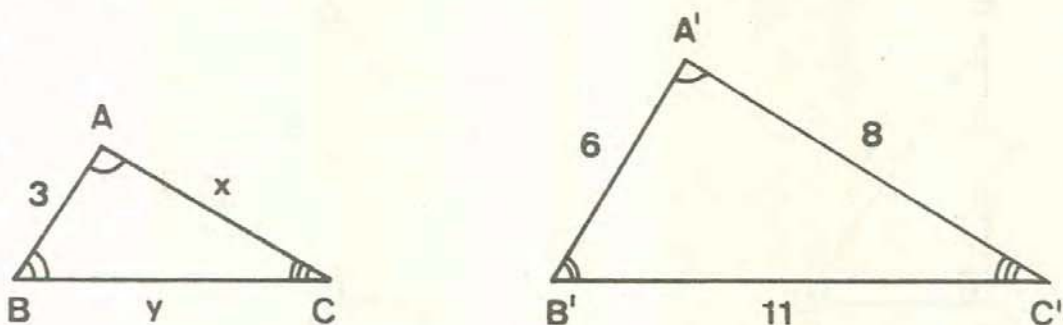
> Dois triângulos semelhantes têm ângulos correspondentes congruentes e lados correspondentes proporcionais.

Em símbolos:

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{A} \cong \hat{A}' \\ \hat{B} \cong \hat{B}' \\ \hat{C} \cong \hat{C}' \end{cases} \text{ e } \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = k$$

Observação: A constante K é chamada razão de semelhança.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

Calcular x e y, sabendo-se que $\triangle$ ABC ~ $\triangle$ A'B'C'.

Solução:

Como os triângulos são semelhantes, temos:

$$\frac{3}{6} = \frac{x}{8} = \frac{y}{11}$$

Então:

a) $\frac{3}{6} = \frac{x}{8} \Rightarrow 6x = 24$

$x = \frac{24}{6}$

$x = 4$

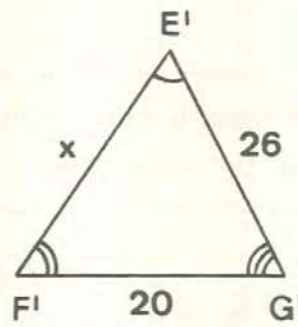
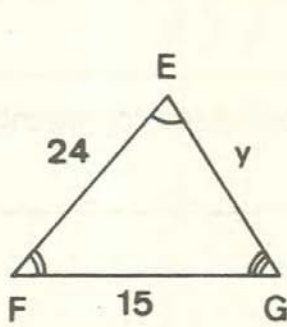
b) $\frac{3}{6} = \frac{y}{11} \Rightarrow 6y = 33$

$y = \frac{33}{6}$

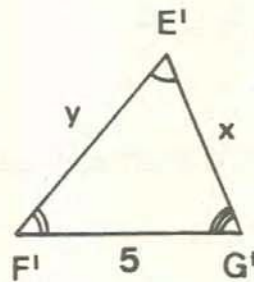
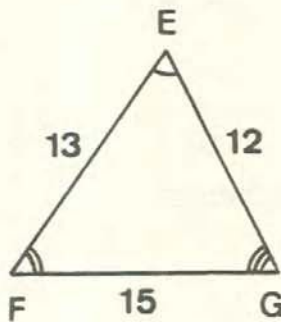
$y = 5,5$

EXERCÍCIOS

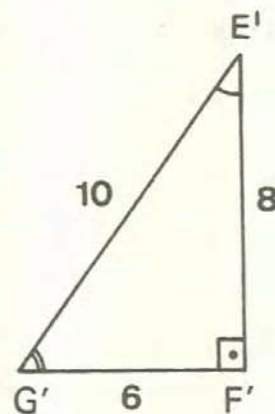
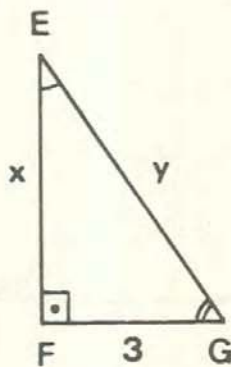
1) Sabendo-se que os triângulos são semelhantes, calcule x e y:

a)

$\frac{24}{x} = \frac{15}{20} \Rightarrow x = 32$

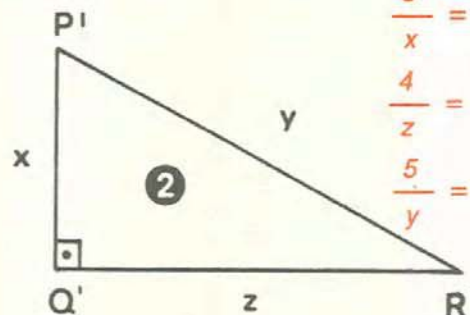
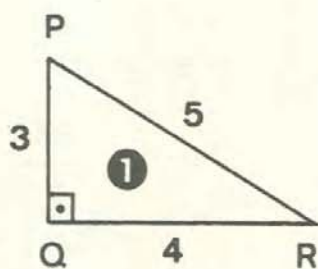
$\frac{y}{26} = \frac{15}{20} \Rightarrow y = 19,5$

b)

$\frac{13}{y} = \frac{15}{5} \Rightarrow y = \frac{13}{3}$

$\frac{12}{x} = \frac{15}{5} \Rightarrow x = 4$

c)

$\frac{x}{8} = \frac{3}{6} \Rightarrow x = 4$

$\frac{y}{10} = \frac{3}{6} \Rightarrow y = 5$

2) Os triângulos dados abaixo são semelhantes. Calcule as medidas do segundo triângulo, sabendo que a razão de semelhança entre o primeiro e o segundo triângulo é $\frac{1}{4}$.

$\frac{3}{x} = \frac{4}{z} = \frac{5}{y} = \frac{1}{4}$

$\frac{3}{x} = \frac{1}{4} \Rightarrow x = 12$

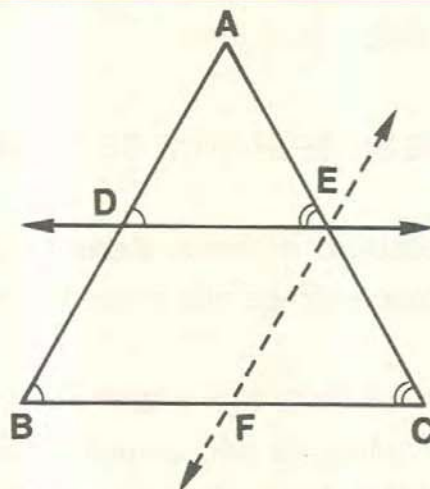
$\frac{4}{z} = \frac{1}{4} \Rightarrow z = 16$

$\frac{5}{y} = \frac{1}{4} \Rightarrow y = 20$

TEOREMA FUNDAMENTAL

Toda reta paralela a um lado de um triângulo e que intercepta os outros dois lados determina um triângulo semelhante ao primeiro.

H $\left\{ \overleftrightarrow{DE} \parallel \overline{BC} \right.$

T $\left\{ \triangle\ ABC \sim \triangle\ ADE \right.$

Demonstração:

Devemos provar que os triângulos ADE e ABC têm os três ângulos correspondentes congruentes e os lados correspondentes proporcionais.

1ª parte:

Nos dois triângulos, os ângulos correspondentes são congruentes.

$\hat{A} \cong \hat{A}$ (comum)
$\hat{B} \cong \hat{D}$ (correspondentes)
$\hat{C} \cong \hat{E}$ (correspondentes)

2ª parte:

Nos dois triângulos os lados correspondentes são proporcionais.

Pelo teorema de Tales, temos: $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AE}{AC}$ ❶

Por E traçamos $\overleftrightarrow{EF} \parallel \overline{AB}$ com F em $\overline{BC}$.

Teorema de Tales $\Rightarrow \dfrac{AE}{AC} = \dfrac{BF}{BC}$

Paralelogramo BDEF $\Rightarrow \overline{DE} \cong \overline{BF}$

$\Rightarrow \dfrac{AE}{AC} = \dfrac{DE}{BC}$ ❷

Comparando ❶ e ❷, temos:

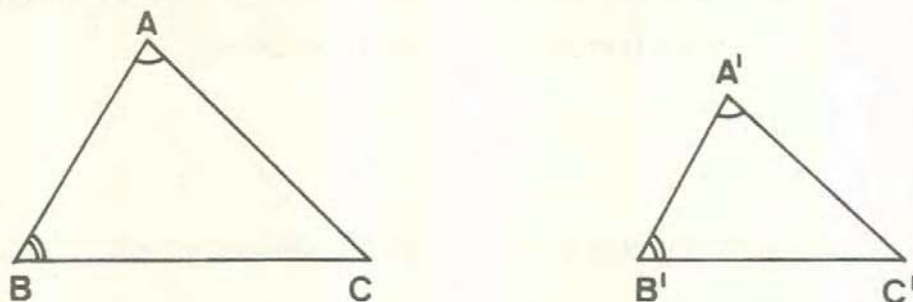
$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

Logo: $\triangle$ ABC ~ $\triangle$ ADE

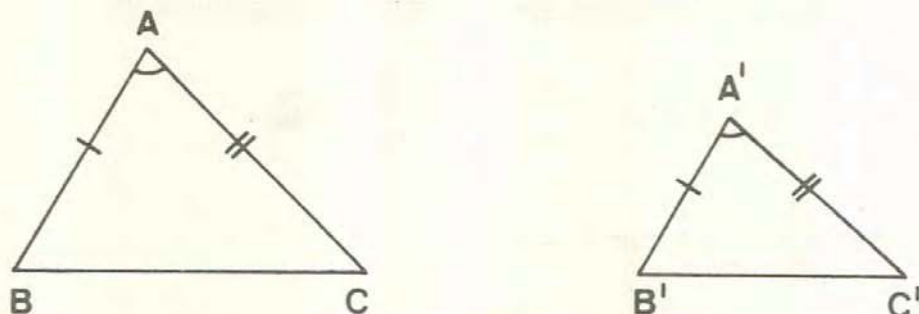
CASOS DE SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

Não é necessário conhecer todas as condições de semelhança de triângulos para chegar à conclusão de que eles são semelhantes; basta algumas delas.

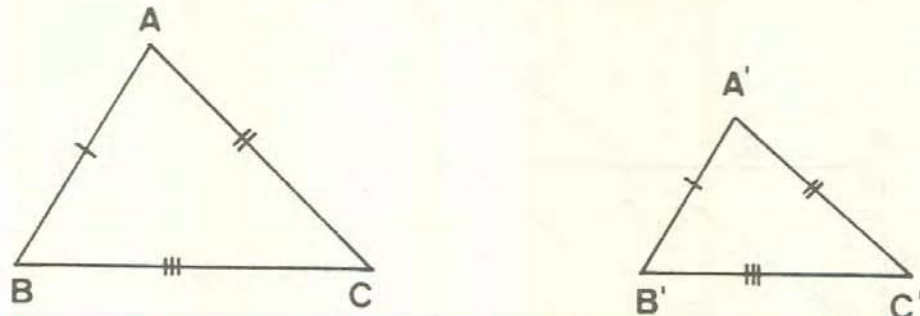
❶ CASO AA (ângulo – ângulo)

Dois triângulos são semelhantes se têm dois ângulos correspondentes congruentes.

$$\hat{A} \cong \hat{A}' \text{ e } \hat{B} \cong \hat{B}' \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

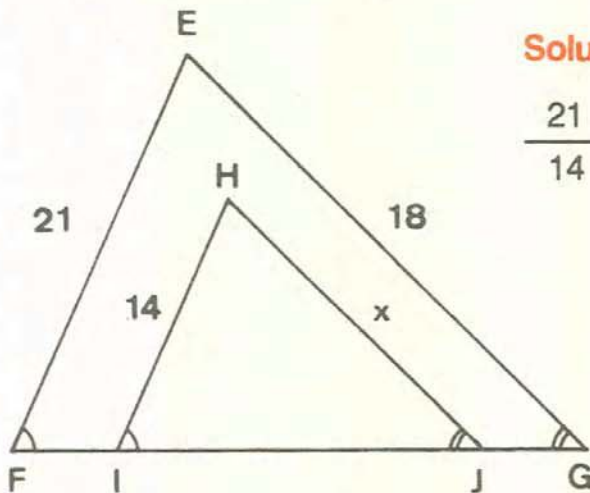
❷ CASO LAL (lado – ângulo – lado)

Dois triângulos são semelhantes se têm dois lados correspondentes proporcionais e o ângulo compreendido entre eles congruente.

$$\hat{A} \cong \hat{A}' \text{ e } \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

❸ CASO LLL (lado – lado – lado)

Dois triângulos são semelhantes se têm os lados correspondentes proporcionais.

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} \Rightarrow \triangle\ ABC \sim \triangle\ A'B'C'$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

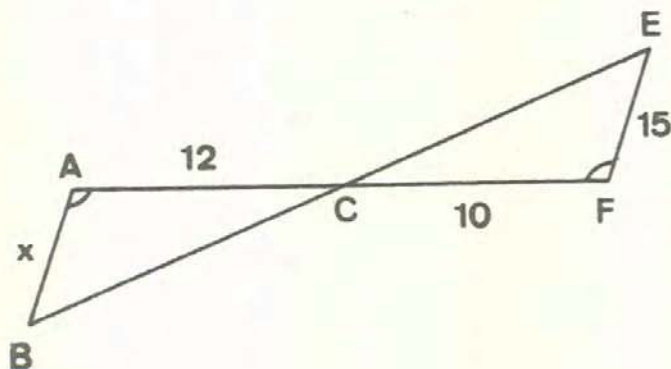
❶ Na figura abaixo, os triângulos são semelhantes. Calcular x.

Solução:

$$\frac{21}{14} = \frac{18}{x} \Rightarrow 21 \cdot x = 14 \cdot 18$$

$$21x = 252$$

$$x = \frac{252}{21}$$

$$x = 12$$

❷ Na figura abaixo, os triângulos são semelhantes. Calcular x.

Solução:

$$\frac{x}{15} = \frac{12}{10} \quad 10 \cdot x = 12 \cdot 15$$

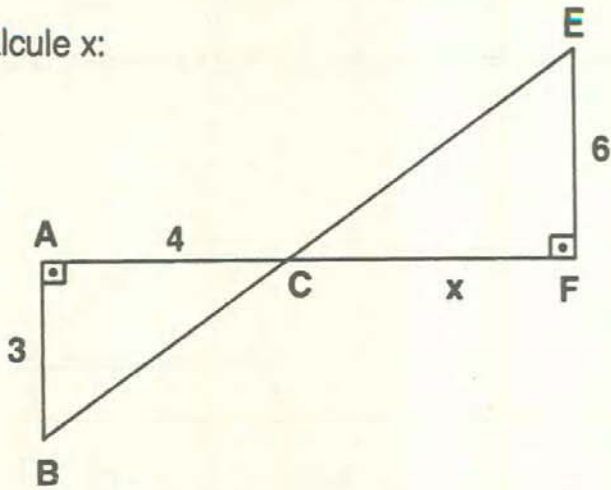
$$10x = 180$$

$$x = \frac{180}{10}$$

$$x = 18$$

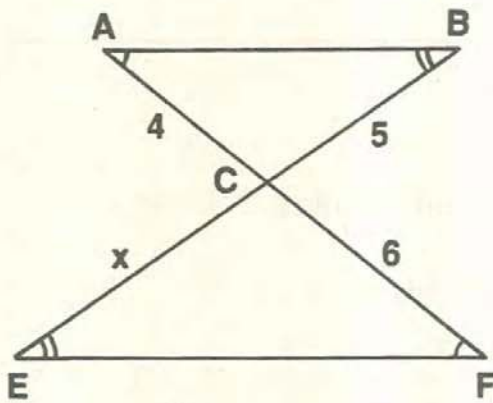
EXERCÍCIOS

1) Calcule x:

a)

$$\frac{3}{6} = \frac{4}{x}$$

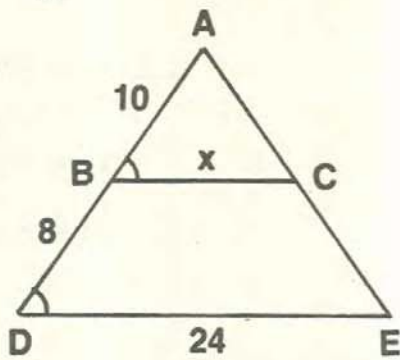
$3x = 24$

$x = 8$

b)

$$\frac{4}{6} = \frac{5}{x}$$

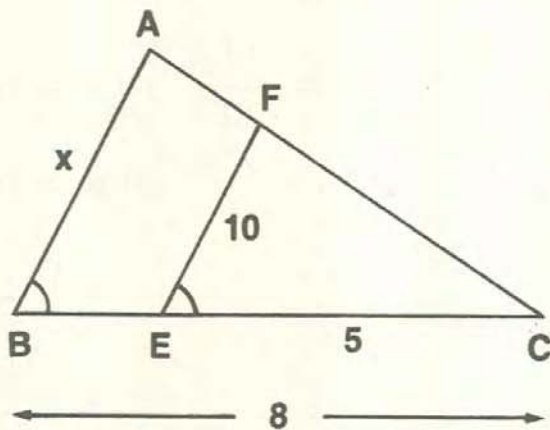
$4x = 30$

$x = 7,5$

c)

$$\frac{x}{24} = \frac{10}{18}$$

$18x = 240$

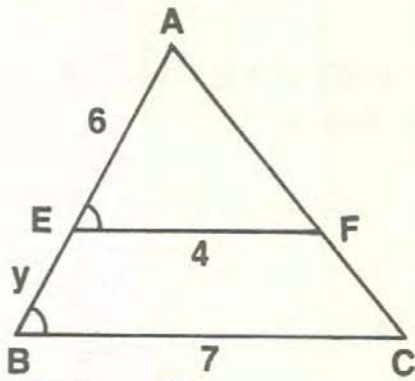
$$x = \frac{40}{3}$$

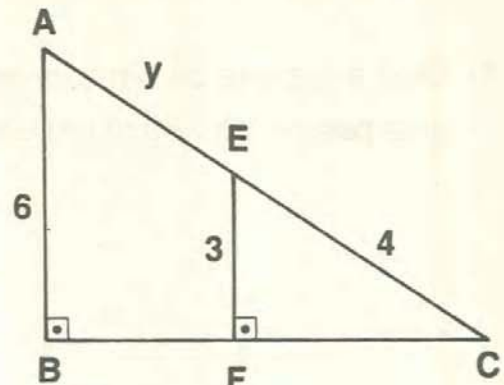
d)

$$\frac{x}{10} = \frac{8}{5}$$

$5x = 80$

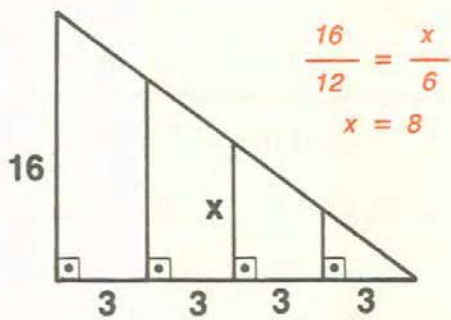
$x = 16$

2) Calcule y:

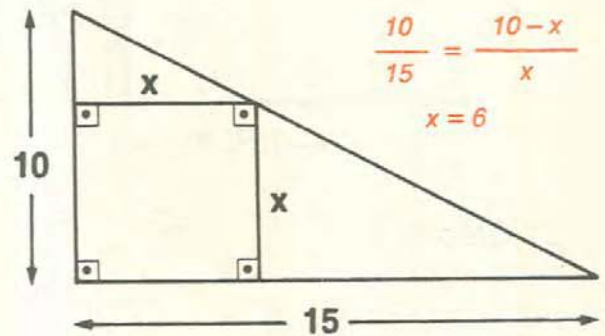
a)

$\frac{6+y}{6} = \frac{7}{4} \Rightarrow y = 4{,}5$

b)

$\frac{6}{3} = \frac{y+4}{4} \Rightarrow y = 4$

3) Calcule x:

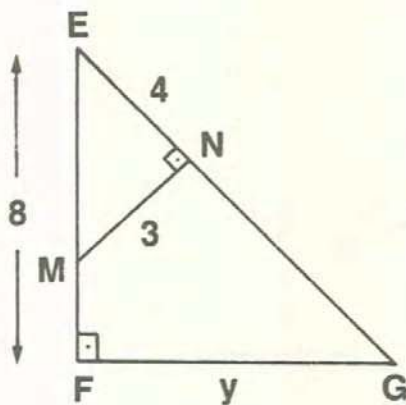
a)

$\frac{16}{12} = \frac{x}{6}$

$x = 8$

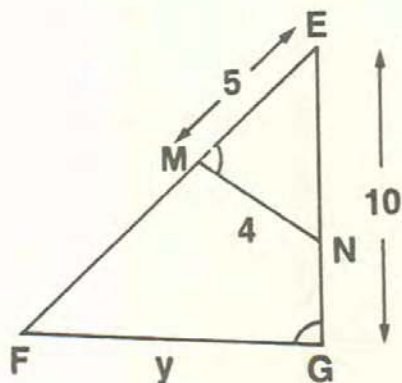
b)

$\frac{10}{15} = \frac{10-x}{x}$

$x = 6$

4) Calcule y, sabendo que os triângulos são semelhantes:

a)

Sugestão: *separar os triângulos, indicando os ângulos congruentes com "marcas iguais".*

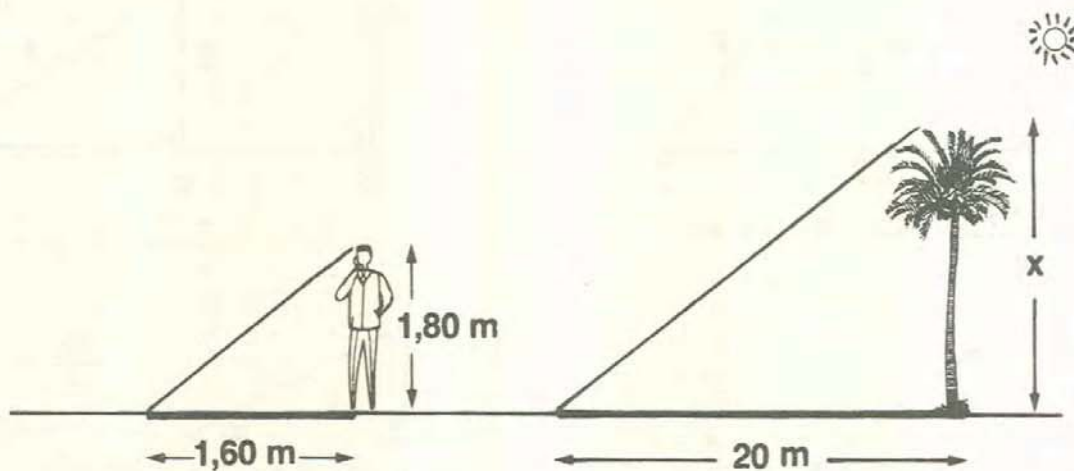
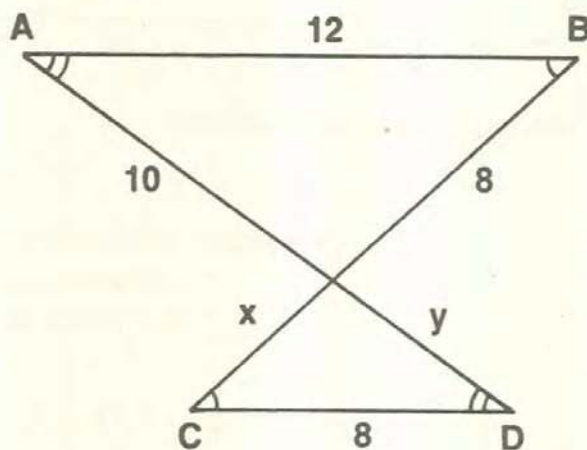
$\frac{y}{3} = \frac{8}{4} \Rightarrow y = 6$

b)

$\frac{y}{4} = \frac{10}{5}$

$5y = 40$

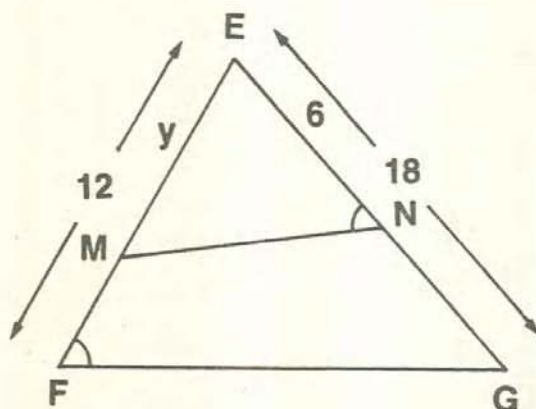
$y = 8$

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1) Qual é a altura de uma árvore que projeta uma sombra de 20m, sabendo que uma pessoa de 1,80 m projeta uma sombra de 1,60 m ?

$\frac{x}{20} = \frac{1,80}{1,60} \Rightarrow x = 22,5$ *Resp.: 22,5 m.*

2) Calcule x:

$\frac{x}{8} = \frac{8}{12} \Rightarrow x = \frac{16}{3}$

$\frac{y}{10} = \frac{8}{12} \Rightarrow y = \frac{20}{3}$

3) Calcule y, sabendo que os triângulos são semelhantes:

$\frac{18}{y} = \frac{12}{6}$

$12y = 108$

$y = 9$

TESTES

1) Na figura abaixo, os triângulos são semelhantes.

Sabendo-se que a razão de semelhança entre o primeiro e o segundo triângulo é $\frac{1}{3}$, então as medidas dos lados deste último são:

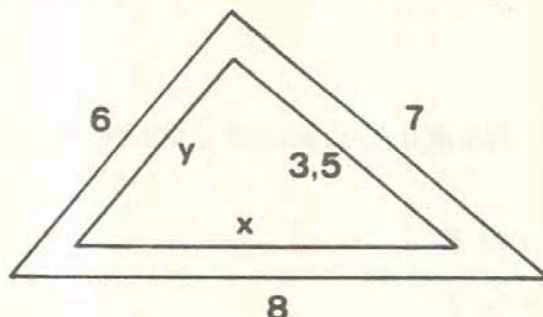
- ■ a) 12, 21, 27
- b) 12, 24, 27
- c) 21, 27, 30
- d) 15, 18, 27

$$\frac{4}{x} = \frac{7}{y} = \frac{9}{z} = \frac{1}{3} \Rightarrow \begin{cases} \frac{4}{x} = \frac{1}{3} \Rightarrow x = 12 \\ \frac{7}{y} = \frac{1}{3} \Rightarrow y = 21 \\ \frac{9}{z} = \frac{1}{3} \Rightarrow z = 27 \end{cases}$$

2) Na figura abaixo, os triângulos são semelhantes. Então, x e y valem, respectivamente:

- ■ a) 4 e 3
- b) 3 e 4
- c) 4 e 5
- d) 3 e 5

$$\frac{x}{8} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 4$$

$$\frac{y}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow y = 3$$

3) (UJF - MG) Os lados de um triângulo medem, respectivamente, 7, 9 e 14 dm. Qual é o perímetro do triângulo semelhante ao dado cujo lado maior é de 21 dm ?

- ■ a) 45 dm
- b) 55 dm
- c) 60 dm
- d) 75 dm

$$\frac{x}{7} = \frac{y}{9} = \frac{21}{14}$$

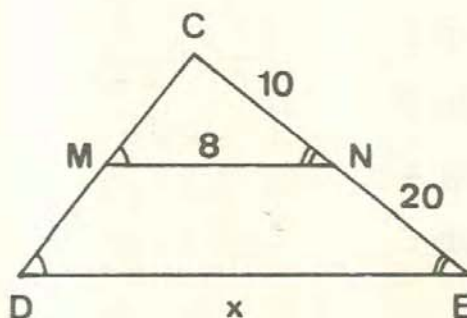
$$\underbrace{10,5}_{x} + \underbrace{13,5}_{y} + 21 = 45$$

4) Na figura abaixo, o valor de x é:

- a) 18
- b) 20
- c) 22
- ■ d) 24

$$\frac{8}{x} = \frac{10}{30}$$

$$x = 24$$

C
10
M 8 N
20
D x E

5) (PUC - SP) Na figura ao lado as retas AB e CD são paralelas. AB = 136, CE = 75 e CD = 50. Quanto mede o segmento AE ?

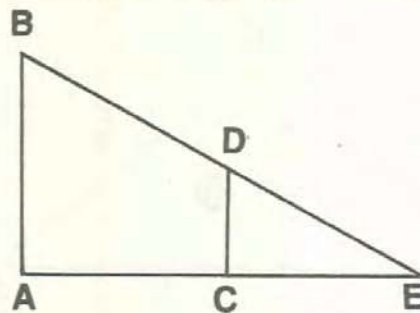
a) 136

b) 306

■ c) 204

d) 163

$$\frac{136}{50} = \frac{AE}{75}$$

$AE = 204$

6) (UF - PA) Na figura ao lado AB = 15, AD = 12 e CD = 4. Sendo $\overline{EC}$ paralelo a $\overline{AB}$, qual o valor de $\overline{EC}$?

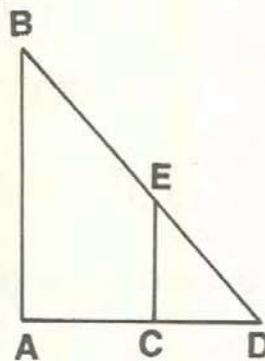
a) 2

b) 3

c) 4

■ d) 5

$$\frac{15}{EC} = \frac{12}{4}$$

$EC = 5$

7) Na figura abaixo, o valor de x é:

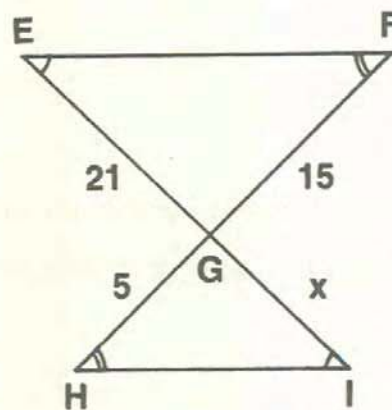
a) 6

■ b) 7

c) 8

d) 9

$$\frac{21}{x} = \frac{15}{5}$$

$x = 7$

8) Na figura abaixo, o valor de x é:

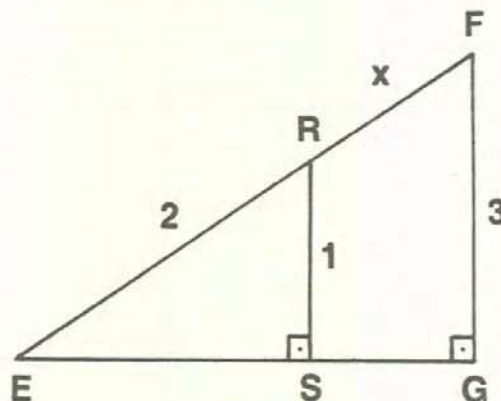
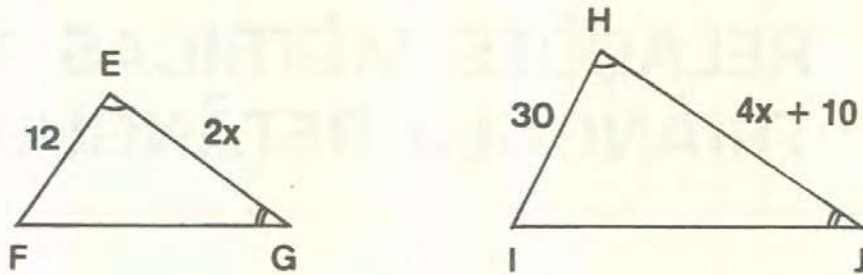
a) 2

b) 3

■ c) 4

d) 5

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{2+x}$$

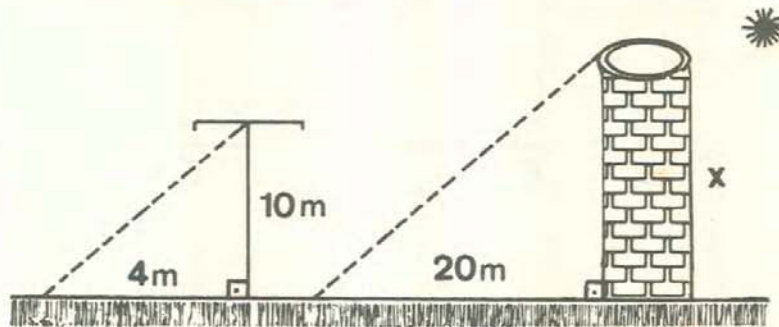
$x = 4$

9) Na figura os triângulos são semelhantes. Então, o valor de x é:

■ a) 10

b) 11

c) 12

d) 13

$\frac{12}{30} = \frac{2x}{4x + 10} \Rightarrow x = 10$

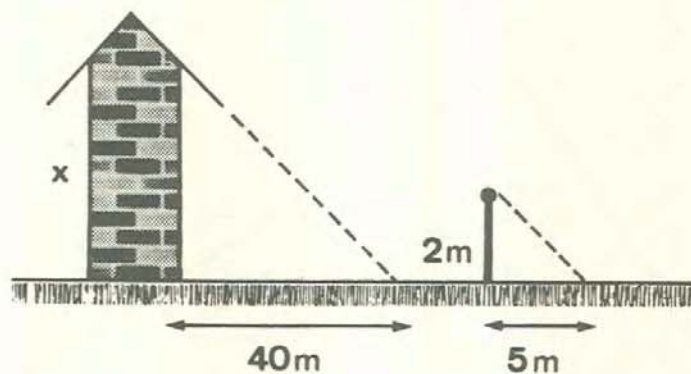
10) Um poste de 10 m projeta uma sombra de 4 m. Então, a altura de uma chaminé que projeta uma sombra de 20 m é de:

a) 40 m

b) 45 m

■ c) 50 m

d) 60 m

$\frac{10}{x} = \frac{4}{20} \Rightarrow x = 50$

11) Uma torre projeta uma sombra de 40 m, ao mesmo tempo que um bastão de 2 m projeta uma sombra de 5 m. Então, a altura da torre é de:

a) 10 m

b) 12 m

c) 14 m

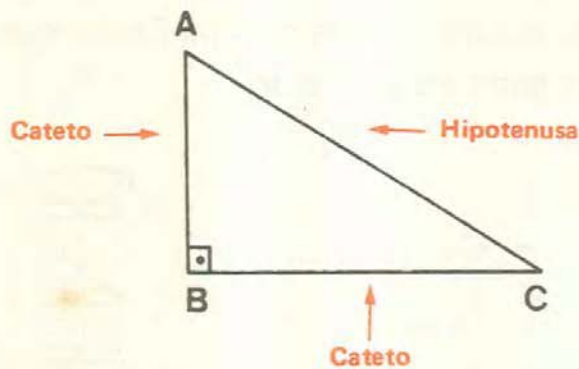
■ d) 16 m

$\frac{x}{2} = \frac{40}{5} \Rightarrow x = 16$

16 RELAÇÕES MÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

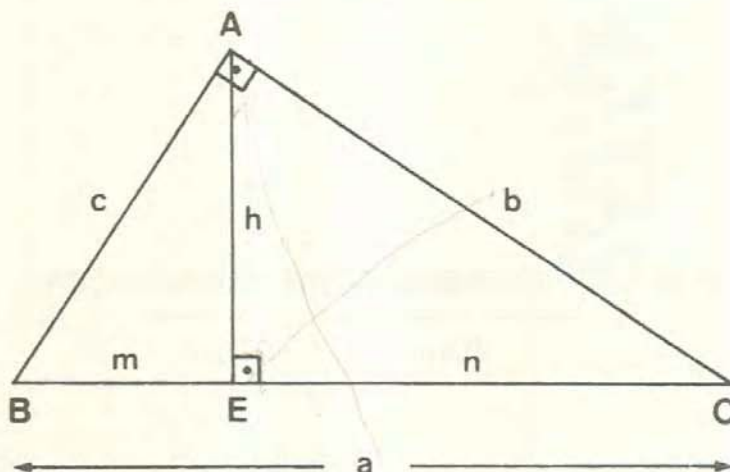
PRELIMINARES

Vamos recordar:

O **triângulo retângulo** é aquele que tem um ângulo reto.

Observe que:

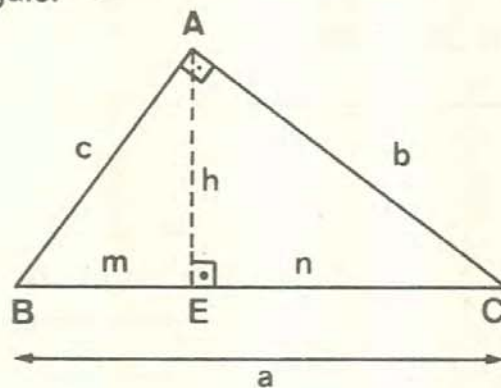
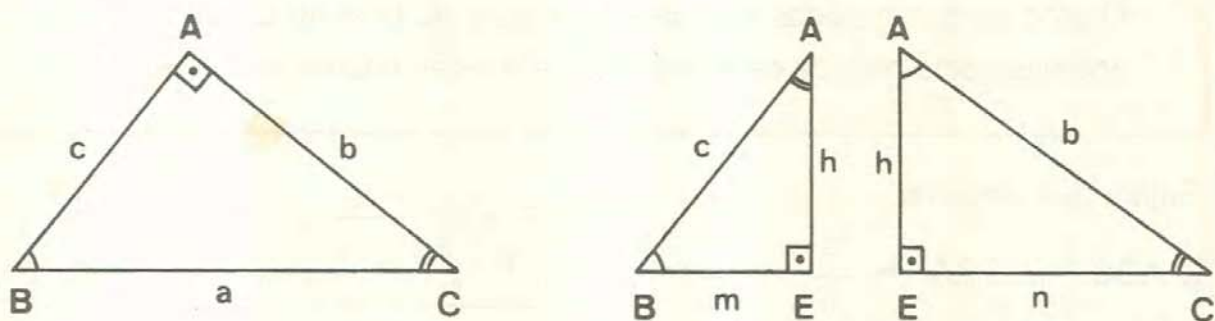
- Os lados que formam o ângulo reto são chamados **catetos.**
- O lado oposto ao ângulo reto é chamado **hipotenusa.**

ELEMENTOS DE UM TRIÂNGULO RETÂNGULO

Seja o triângulo retângulo ABC:

Os elementos do triângulo dado são:

a → medida da hipotenusa $\overline{BC}$
b → medida do cateto $\overline{AC}$
c → medida do cateto $\overline{AB}$
h → medida da altura $\overline{AE}$
m → medida da projeção de $\overline{AB}$ sobre a hipotenusa
n → medida de projeção de $\overline{AC}$ sobre a hipotenusa

RELAÇÕES MÉTRICAS

Seja o triângulo retângulo:

Traçando a altura relativa à hipotenusa do triângulo retângulo ABC, obtemos dois outros triângulos retângulos.

Os triângulos ABC, EBA e EAC são semelhantes (têm dois ângulos congruentes). Então, podemos enunciar as relações que seguem.

1ª RELAÇÃO

> A medida de cada cateto é a média proporcional entre as medidas da hipotenusa e da projeção deste cateto.

Sejam as semelhanças:

$\Delta\ ABC \sim \Delta\ EBA \Rightarrow \dfrac{a}{c} = \dfrac{c}{m} \Rightarrow$ $\boxed{c^2 = a \cdot m}$

$\Delta\ ABC \sim \Delta\ EAC \Rightarrow \dfrac{a}{b} = \dfrac{b}{n} \Rightarrow$ $\boxed{b^2 = a \cdot n}$

2ª RELAÇÃO

> A medida da altura à hipotenusa é a média proporcional entre as medidas das projeções dos catetos.

Sejam os triângulos:

$\Delta\ EBA \sim \Delta\ EAC \Rightarrow \dfrac{h}{n} = \dfrac{m}{h} \Rightarrow$ $\boxed{h^2 = m \cdot n}$

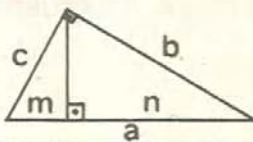
3ª RELAÇÃO

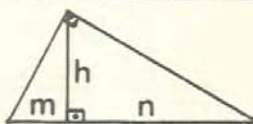
> O produto das medidas dos catetos é igual ao produto da medida da hipotenusa pela medida da altura relativa a essa hipotenusa.

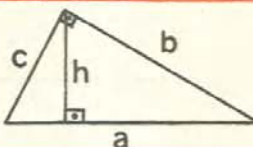
Sejam os triângulos:

$\Delta\ ABC \sim \Delta\ EBA \Rightarrow \dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{h} \Rightarrow$ $\boxed{b \cdot c = a \cdot h}$

RESUMO

❶ $c^2 = a \cdot m$

❷ $b^2 = a \cdot n$

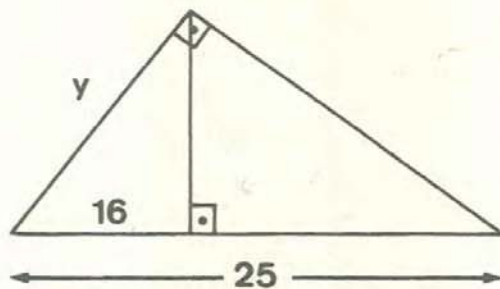
$(\text{cateto})^2 = (\text{hipotenusa}) \cdot (\text{projeção})$

❸ $h^2 = m \cdot n$

$(\text{altura})^2 = (\text{projeção}) \cdot (\text{projeção})$

❹ $b \cdot c = a \cdot h$

$(\text{cateto}) \cdot (\text{cateto}) = (\text{hipotenusa}) \cdot (\text{altura})$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

Calcular o valor de y, nos triângulos retângulos:

a)

Solução:

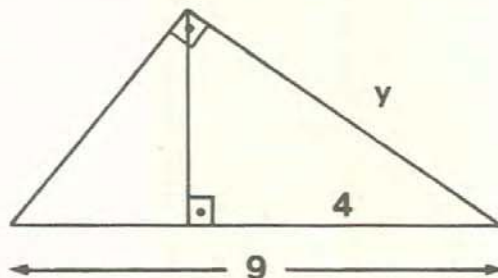
Aplicando ❶ , resulta:

$y^2 = 25 . 16$

$y^2 = 400$

$y = \sqrt{400}$

$y = 20$

b)

Solução:

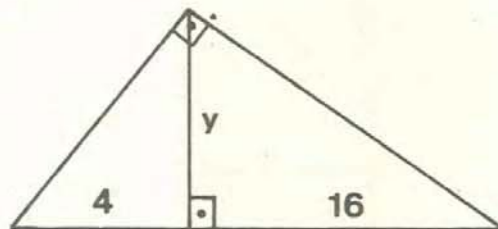
Aplicando ❷ , resulta:

$y^2 = 9 . 4$

$y^2 = 36$

$y = \sqrt{36}$

$y = 6$

c)

Solução:

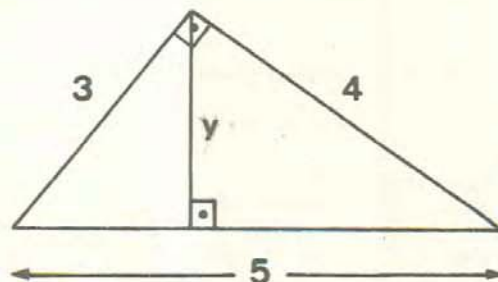
Aplicando ❸ , resulta:

$y^2 = 4 . 16$

$y^2 = 64$

$y = \sqrt{64}$

$y = 8$

d)

Solução:

Aplicando ❹ , resulta:

$5 . y = 3 . 4$

$5y = 12$

$y = \dfrac{12}{5}$

$y = 2,4$

EXERCÍCIOS

1) Calcule o valor de x nos triângulos retângulos:

a)

$x^2 = 9 \cdot 16 \Rightarrow x = 12$

b)

$3^2 = 5 \cdot x \quad \Rightarrow \quad x = 1,8$

c)

$4^2 = 5 \cdot x \quad \Rightarrow \quad x = 3,2$

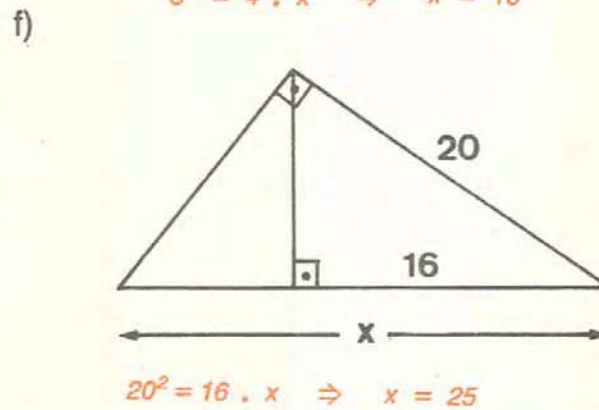
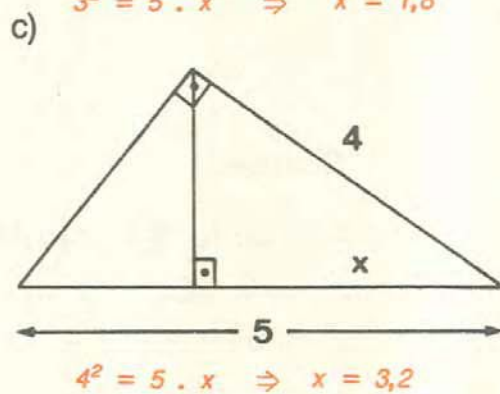
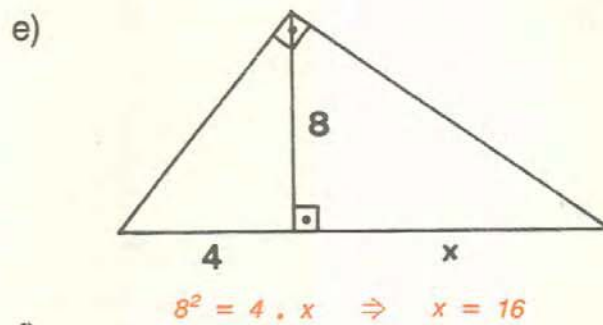
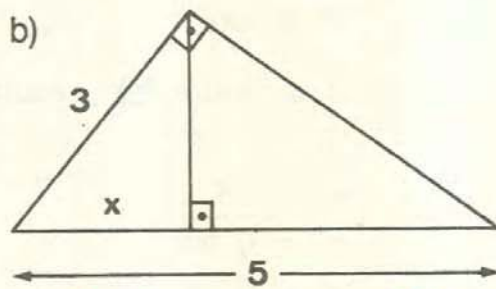
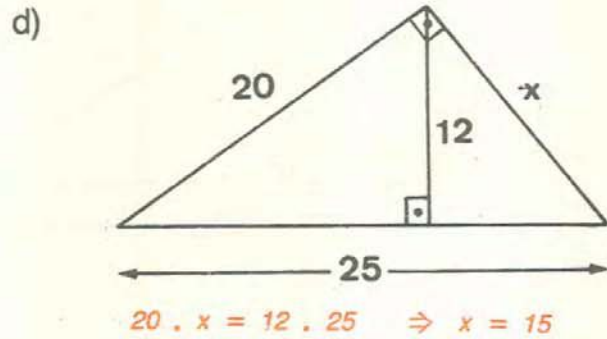
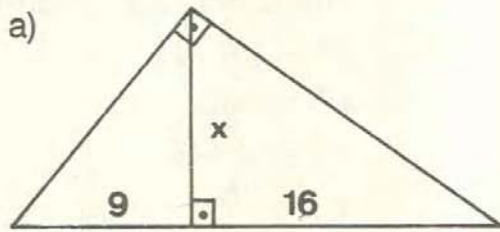
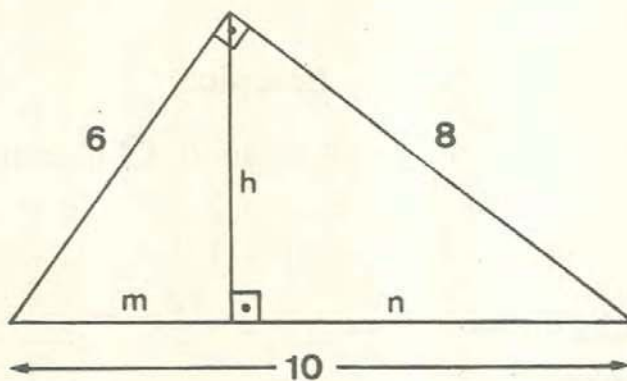
d)

$20 \cdot x = 12 \cdot 25 \quad \Rightarrow \quad x = 15$

e)

$8^2 = 4 \cdot x \quad \Rightarrow \quad x = 16$

f)

$20^2 = 16 \cdot x \quad \Rightarrow \quad x = 25$

2) Calcule h, m e n no triângulo retângulo:

Cálculo de h:

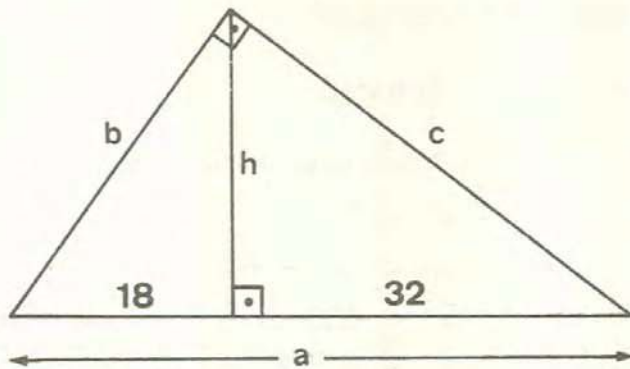
$10h = 8 \cdot 6 \quad \Rightarrow \quad h = 4,8$

Cálculo de m:

$36 = 10m \Rightarrow m = 3,6$

Cálculo de n:

$64 = 10n \quad \Rightarrow \quad n = 6,4$

3) Calcule a, b, c e h no triângulo retângulo:

Cálculo de a:

$a = 18 + 32 \Rightarrow a = 50$

Cálculo de h:

$h^2 = 18 \cdot 32 \Rightarrow h = 24$

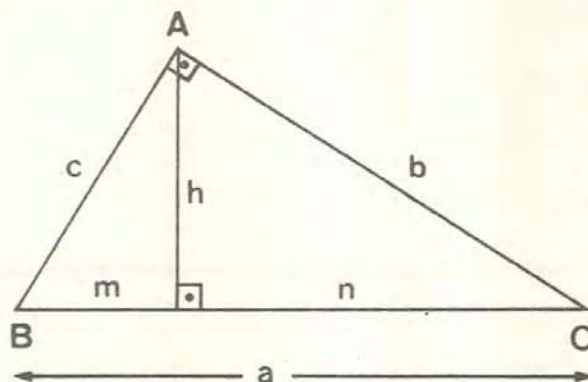
Cálculo de b:

$b^2 = 50 \cdot 18 \Rightarrow b = 30$

Cálculo de c:

$c^2 = 50 \cdot 32 \Rightarrow c = 40$

4ª RELAÇÃO – TEOREMA DE PITÁGORAS

O quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.

Pela relação ❶, temos:

$$b^2 = a \cdot n$$
$$c^2 = a \cdot m \quad +$$

$$b^2 + c^2 = a \cdot n + a \cdot m$$ • Somando membro a membro.

$$b^2 + c^2 = a(n + m)$$ • Fatorando o 2º membro.

$$b^2 + c^2 = a \cdot a$$ • Observando que n + m = a.

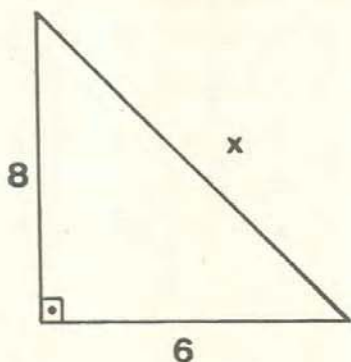
$$b^2 + c^2 = a^2$$

ou

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

Calcular o valor de x nos seguintes triângulos retângulos:

a)

Solução:

Pelo teorema de Pitágoras:

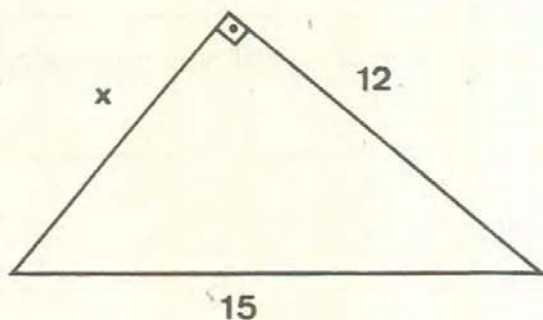
$x^2 = 6^2 + 8^2$

$x^2 = 36 + 64$

$x^2 = 100$

$x = \sqrt{100}$

$x = 10$

b)

Solução:

Pelo teorema de Pitágoras:

$15^2 = x^2 + 12^2$

$225 = x^2 + 144$

$x^2 = 81$

$x = \sqrt{81}$

$x = 9$

EXERCÍCIOS

1) Calcule x nas figuras abaixo:

a)

x = 15

c)

x = 6

b)

x = 3

d)

$(3x)^2 + (4x)^2 = 20^2 \Rightarrow x = 4$

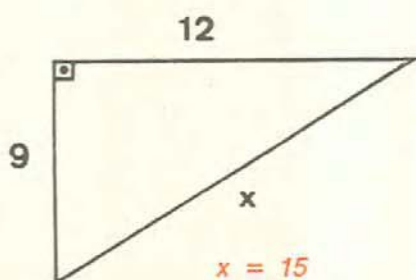
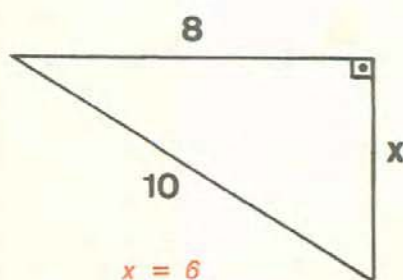
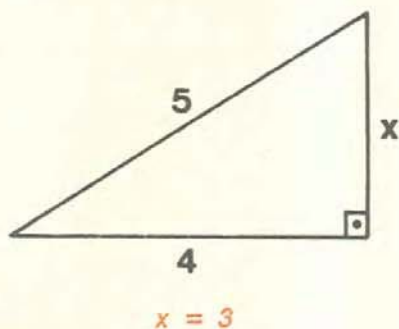
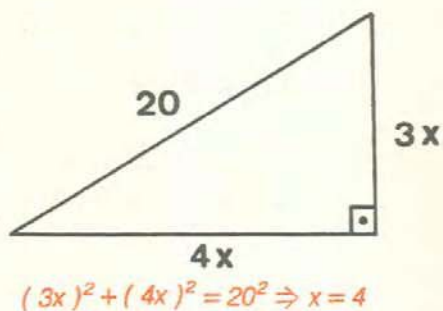



TABELA DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS DE 1° a 89°.

Ângulo	Seno	Cosseno	Tangente	Ângulo	Seno	Cosseno	Tangente
1°	0,0175	0,9998	0,0175	46°	0,7193	0,6947	1,0355
2°	0,0349	0,9994	0,0349	47°	0,7314	0,6820	1,0724
3°	0,0523	0,9986	0,0524	48°	0,7431	0,6691	1,1106
4°	0,0698	0,9976	0,0699	49°	0,7547	0,6561	1,1504
5°	0,0872	0,9962	0,0875	50°	0,7660	0,6428	1,1918
6°	0,1045	0,9945	0,1051	51°	0,7771	0,6293	1,2349
7°	0,1219	0,9925	0,1228	52°	0,7880	0,6157	1,2799
8°	0,1392	0,9903	0,1405	53°	0,7986	0,6018	1,3270
9°	0,1564	0,9877	0,1584	54°	0,8090	0,5878	1,3764
10°	0,1736	0,9848	0,1763	55°	0,8192	0,5736	1,4281
11°	0,1908	0,9816	0,1944	56°	0,8290	0,5592	1,4826
12°	0,2097	0,9781	0,2126	57°	0,8387	0,5446	1,5399
13°	0,2250	0,9744	0,2309	58°	0,8480	0,5299	1,6003
14°	0,2419	0,9703	0,2493	59°	0,8572	0,5150	1,6643
15°	0,2588	0,9659	0,2679	60°	0,8660	0,5000	1,7321
16°	0,2756	0,9613	0,2867	61°	0,8746	0,4848	1,8040
17°	0,2924	0,9563	0,3057	62°	0,8829	0,4695	1,8807
18°	0,3090	0,9511	0,3249	63°	0,8910	0,4540	1,9626
19°	0,3256	0,9455	0,3443	64°	0,8988	0,4384	2,0503
20°	0,3420	0,9397	0,3640	65°	0,9063	0,4226	2,1445
21°	0,3584	0,9336	0,3839	66°	0,9135	0,4067	2,2460
22°	0,3746	0,9272	0,4040	67°	0,9205	0,3907	2,3559
23°	0,3907	0,9205	0,4245	68°	0,9272	0,3746	2,4751
24°	0,4067	0,9135	0,4452	69°	0,9336	0,3584	2,6051
25°	0,4226	0,9063	0,4663	70°	0,9397	0,3420	2,7475
26°	0,4384	0,8988	0,4877	71°	0,9455	0,3256	2,9042
27°	0,4540	0,8910	0,5095	72°	0,9511	0,3090	3,0777
28°	0,4695	0,8829	0,5317	73°	0,9563	0,2924	3,2709
29°	0,4848	0,8746	0,5543	74°	0,9613	0,2756	3,4874
30°	0,5000	0,8660	0,5774	75°	0,9659	0,2588	3,7321
31°	0,5150	0,8572	0,6009	76°	0,9703	0,2419	4,0108
32°	0,5299	0,8480	0,6249	77°	0,9744	0,2250	4,3315
33°	0,5446	0,8387	0,6494	78°	0,9781	0,2079	4,7046
34°	0,5592	0,8290	0,6745	79°	0,9816	0,1908	5,1446
35°	0,5736	0,8192	0,7002	80°	0,9848	0,1736	5,6713
36°	0,5878	0,8090	0,7265	81°	0,9877	0,1564	6,3188
37°	0,6018	0,7986	0,7536	82°	0,9903	0,1392	7,1154
38°	0,6157	0,7880	0,7813	83°	0,9925	0,1219	8,1443
39°	0,6293	0,7771	0,8098	84°	0,9945	0,1045	9,5144
40°	0,6428	0,7660	0,8391	85°	0,9962	0,0872	11,4301
41°	0,6561	0,7547	0,8693	86°	0,9976	0,0698	14,3007
42°	0,6691	0,7431	0,9004	87°	0,9986	0,0523	19,0811
43°	0,6820	0,7314	0,9325	88°	0,9994	0,0349	28,6363
44°	0,6947	0,7193	0,9657	89°	0,9998	0,0175	57,2900
45°	0,7071	0,7071	1,0000				

3) No triângulo retângulo da figura, calcule:

a) sen α $\frac{8}{17}$

b) cos α $\frac{15}{17}$

c) tg α $\frac{8}{15}$

d) sen β $\frac{15}{17}$

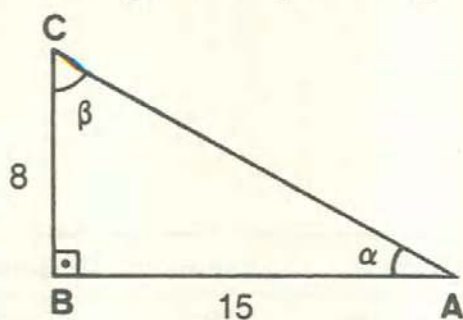
e) cos β $\frac{8}{17}$

f) tg β $\frac{15}{8}$

TABELA DE RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS

Os valores aproximados dos senos, cossenos e tangentes dos ângulos de 1° a 89° são encontrados na tabela da página seguinte.

Uso da tabela

Com a tabela podemos resolver dois tipos de problemas:

- *Dado o ângulo, determinar a razão trigonométrica.*

Exemplos:

1. Calcule sen 15°.
   Na coluna ângulo, procuramos 15°.
   Na coluna seno, achamos 0,2588.
   Assim: sen 15° = 0,2588.

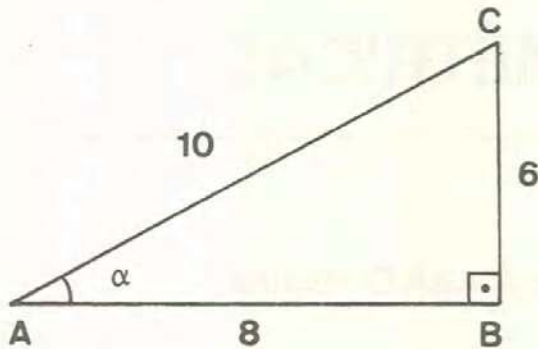
2. Calcule tg 50°.
   Na coluna ângulo, procuramos 50°.
   Na coluna tangente, achamos 1,1918.
   Assim: tg 50° = 1,1918.

- *Dada a razão trigonométrica, determinar o ângulo.*

Exemplo:

Calcule o ângulo x, sendo cos x = 0,4226.
Na coluna cosseno, procuramos 0,4226.
Na coluna ângulo, achamos 65°.
Assim: x = 65°.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

Calcular o seno, o cosseno e a tangente do ângulo α.

Solução:

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{6}{10} = 0,6$$

$$\cos\alpha = \frac{8}{10} = 0,8$$

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{6}{8} = 0,75$$

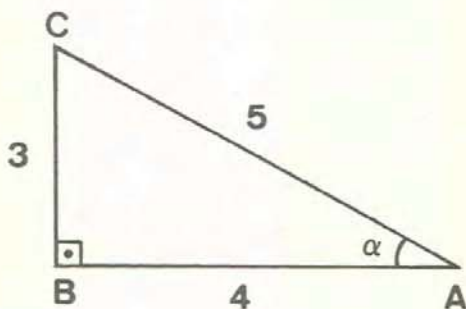
Observações:

- O seno e o cosseno são sempre números reais menores que 1, pois qualquer cateto é sempre menor que a hipotenusa.
- A tangente é um número real positivo.

EXERCÍCIOS

1) No triângulo retângulo da figura, calcule:

a) sen α $\frac{3}{5}$

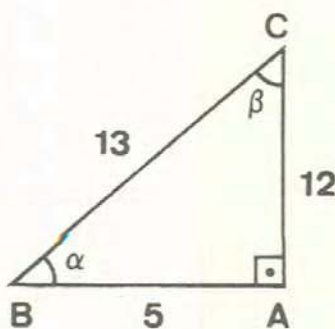
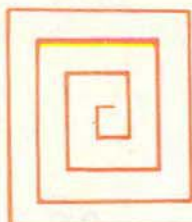
b) cos α $\frac{4}{5}$

c) tg α $\frac{3}{4}$

2) No triângulo retângulo da figura, calcule:

a) sen α $\frac{12}{13}$ d) sen β $\frac{5}{13}$

b) cos α $\frac{5}{13}$ e) cos β $\frac{12}{13}$

c) tg α $\frac{12}{5}$ f) tg β $\frac{5}{12}$

17

RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS

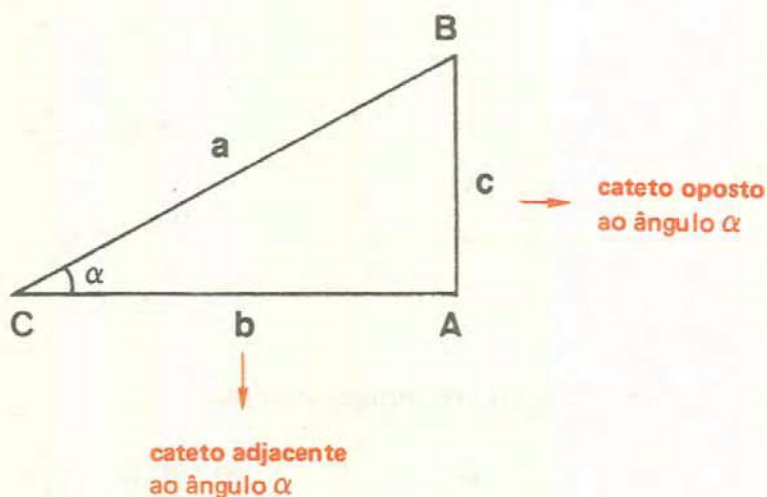
SENO, COSSENO E TANGENTE DE UM ÂNGULO AGUDO

No triângulo retângulo definem-se:

- seno de um ângulo agudo = $\dfrac{\text{medida do cateto oposto}}{\text{medida da hipotenusa}}$

- cosseno de um ângulo agudo = $\dfrac{\text{medida do cateto adjacente}}{\text{medida da hipotenusa}}$

- tangente de um ângulo agudo = $\dfrac{\text{medida do cateto oposto}}{\text{medida do cateto adjacente}}$

Para o triângulo retângulo ABC:

temos que:

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{c}{a} \qquad \cos\alpha = \frac{b}{a} \qquad \text{tg}\,\alpha = \frac{c}{b}$$

15) Na figura abaixo, x e y valem respectivamente:

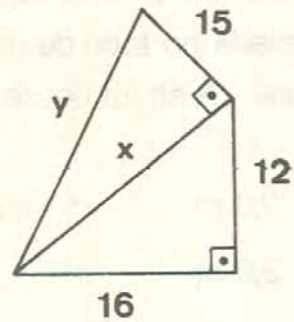
a) 25 e 20

■ b) 20 e 25

c) 20 e 15

d) 15 e 20

$x^2 = 12^2 + 16^2$
$x^2 = 400$
$x = 20$

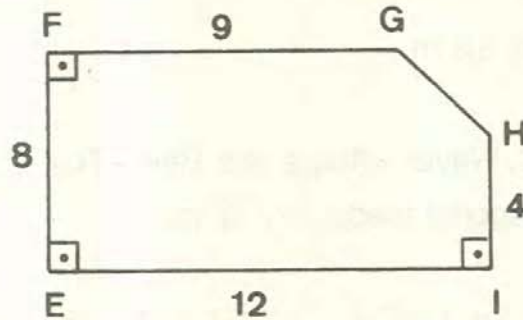
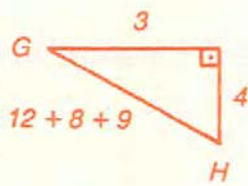
$y^2 = 15^2 + 20^2$
$y^2 = 625$
$y = 25$

16) O perímetro da figura EFGHI é:

a) 28 $(GH)^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow GH = 5$

b) 34

c) 36

■ d) 38

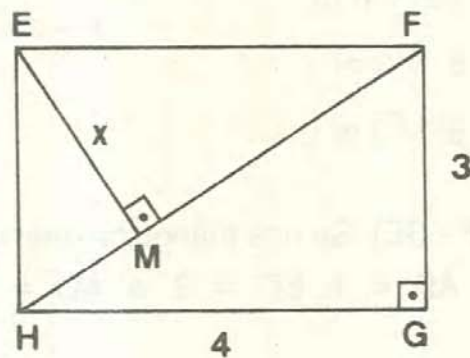
$P = 5 + 4 + 12 + 8 + 9$
$P = 38$

17) No retângulo abaixo, o segmento $\overline{EM}$ é perpendicular à diagonal $\overline{FH}$. O valor de x é:

a) 2,2 $(FH)^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow FH = 5$

■ b) 2,4

c) 2,6

d) 2,8

$3 \cdot 4 = 5 \cdot x$
$5x = 12$
$x = 2{,}4$

18) Na figura abaixo, o valor de x é:

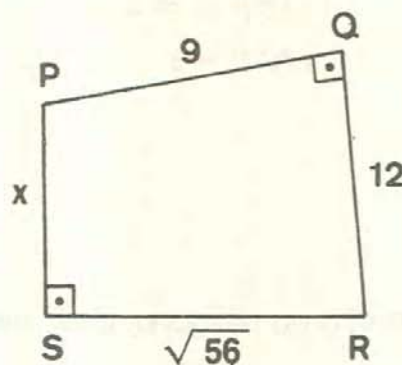
a) 11

$(PR)^2 = 9^2 + 12^2 \Rightarrow PR = 15$

b) 12

■ c) 13

d) 14

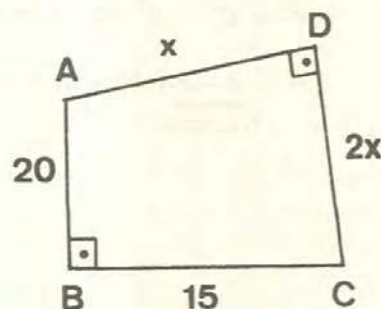
$x^2 + (\sqrt{56})^2 = 15^2$
$x^2 = 169$
$x = 13$

19) Na figura abaixo, o valor de x é:

a) 125

b) 215

■ c) $\sqrt{125}$

d) $\sqrt{215}$

$(AC)^2 = 20^2 + 15^2$
$(AC)^2 = 625$
$AC = 25$

$x^2 + (2x)^2 = 25^2 \Rightarrow 5x^2 = 625 \Rightarrow x^2 = 125 \Rightarrow x = \sqrt{125}$

11) (UMC - SP) Uma escada medindo 4 metros tem uma de suas extremidades apoiada no topo de um muro, e a outra extremidade dista 2,4 m da base do muro. A altura desse muro é:

a) 2,3 m

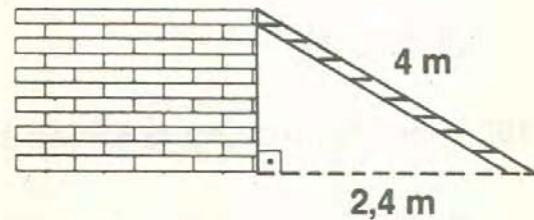
b) 3,0 m

■ c) 3,2 m

d) 3,8 m

$a^2 + (2,4)^2 = 4^2$

$a^2 = 10,24$

$a = 3,2$

12) (C. Naval - Angra dos Reis - RJ) Qual é o perímetro do quadrado em que a diagonal mede $3\sqrt{6}$ m ?

■ a) $12\sqrt{3}$ m

b) $12\sqrt{6}$ m

c) $8\sqrt{3}$ m

d) $6\sqrt{3}$ m

$x^2 + x^2 = (3\sqrt{6})^2$

$2x^2 = 54$

$x = 3\sqrt{3}$

$P = 4 \cdot (3\sqrt{3})$

$P = 12\sqrt{3}$

13) (UF - SE) Se nos triângulos retângulos, representados na figura ao lado, têm-se AB = 1, BC = 2 e AD = 3, então CD é igual a:

a) 1

■ b) 2

c) 3

d) 4

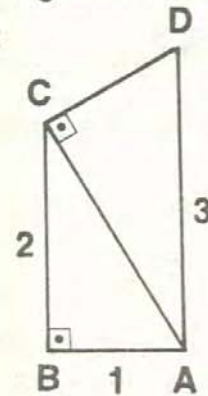
$(AC)^2 = 2^2 + 1^2$

$(AC)^2 = 5$

$(CD)^2 + 5 = 3^2$

$(CD)^2 = 4$

$CD = 2$

D
C
3
2
B 1 A

14) O perímetro do polígono, dado na figura seguinte, é:

a) 32 m

b) 34 m

c) 36 m

■ d) 40 m

$x^2 = 6^2 + 8^2 \Rightarrow x = 10$

$P = \underbrace{6 + 8}_{\text{"degraus"}} + 10 + 16 = 40$

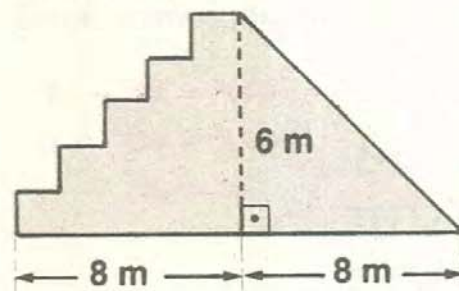
6) Na figura abaixo, o valor de x é:

a) 6

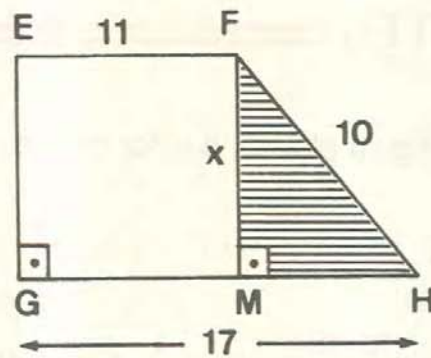
b) 7

■ c) 8

d) 9

$MH = 6$

$x^2 + 6^2 = 10^2$

$x^2 = 64$

$x = 8$

7) (UF - PA) Num triângulo retângulo, um cateto é o dobro do outro, e a hipotenusa mede 10 cm. A soma dos catetos mede:

a) $4\sqrt{5}$ cm

■ b) $6\sqrt{5}$ cm

c) $8\sqrt{5}$ cm

d) $12\sqrt{5}$ cm

$x^2 + (2x)^2 = 10^2$

$x = 2\sqrt{5}$

Logo: $2x = 4\sqrt{5}$

$S = 2\sqrt{5} + 4\sqrt{5}$

$S = 6\sqrt{5}$

8) A altura do triângulo retângulo da figura abaixo vale:

■ a) 4,8

b) 5,2

c) 8,5

d) 10

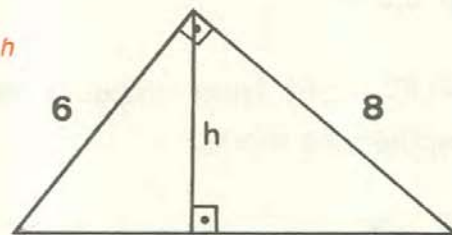
$a^2 = 6^2 + 8^2$

$a^2 = 100$

$a = 10$

$6 \cdot 8 = 10 \cdot h$

$10h = 48$

$h = 4,8$

9) (F.M. Barbacena - MG) As medidas dos catetos de um triângulo retângulo são, respectivamente, 30 cm e 40 cm. A altura relativa à hipotenusa mede:

■ a) 24 cm

b) 20 cm

c) 31 cm

d) 23 cm

$h^2 = 30^2 + 40^2$

$h = 50$

$50 \cdot a = 30 \cdot 40$

$a = 24$

10) Na figura abaixo, o $\triangle$ ABC é retângulo e o $\triangle$ ACD é eqüilátero. Então, o perímetro da figura ABCD é:

a) 39

b) 42

■ c) 43

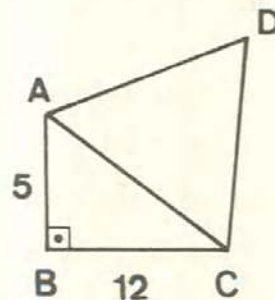
d) 44

$x^2 = 5^2 + 12^2$

$x^2 = 169$

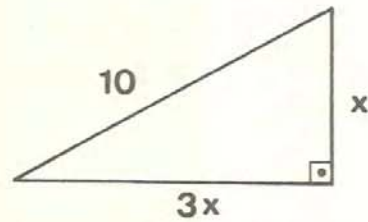
$x = 13$

$P = 13 + 13 + 5 + 12$

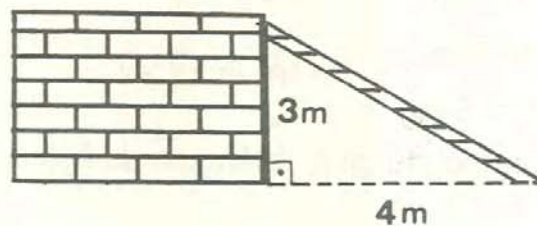
$P = 43$

TESTES

1) Na figura abaixo, o valor de x é:

a) 5
b) 10
■ c) $\sqrt{10}$
d) $\sqrt{5}$

$(x)^2 + (3x)^2 = 10^2$
$x^2 + 9x^2 = 100$
$10x^2 = 100$
$x = \sqrt{10}$

2) A figura abaixo mostra um muro que tem 3 m de altura. Sabendo-se que o pé da escada está a 4 m do muro, então o comprimento da escada é:

■ a) 5 m
b) 6 m
c) 4, 5 m
d) 5,5 m

$x^2 = 3^2 + 4^2$
$x^2 = 25$
$x = 5$

3) (PUC - SP) Num triângulo retângulo cujos catetos medem $\sqrt{3}$ e $\sqrt{4}$, a hipotenusa mede:

a) $\sqrt{5}$
■ b) $\sqrt{7}$
c) $\sqrt{8}$
d) $\sqrt{12}$

$h^2 = 3 + 4$
$h = \sqrt{7}$

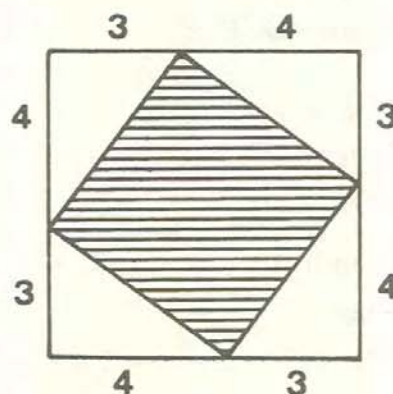
4) (UEPG - PR) Os dois maiores lados de um triângulo retângulo medem 12 dm e 13 dm. O perímetro desse triângulo é:

a) 36 dm
b) 35 dm
■ c) 30 dm
d) 32 dm

$x^2 + 12^2 = 13^2 \Rightarrow x = 5$
$P = 5 + 12 + 13 = 30$

5) O quadrilátero maior é um quadrado de 7 cm de lado. O perímetro do quadrilátero menor é:

a) 12 cm
b) 16 cm
■ c) 20 cm
d) 25 cm

$x^2 = 3^2 + 4^2$
$x^2 = 25$
$x = 5$
$P = 5 \times 4 = 20$

b) Num triângulo retângulo um dos catetos mede 5 cm e a hipotenusa 13 cm. Calcule a medida do outro cateto.

$x^2 + 5^2 = 13^2 \Rightarrow x = 12$ Resp.: 12 cm.

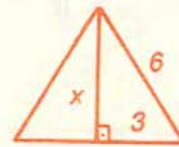
c) O perímetro de um quadrado é 20 cm. Calcule a medida da diagonal do quadrado.

$x^2 = 5^2 + 5^2 \Rightarrow x = \sqrt{50}$ ou $5\sqrt{2}$ Resp.: $5\sqrt{2}$ cm.

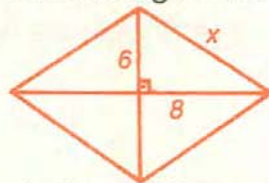
d) Um dos lados de um retângulo mede 4 cm. Calcule a medida da diagonal do retângulo, sabendo-se que o seu perímetro é 14 cm.

$x^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow x = 5$ Resp.: 5 cm.

e) Calcule a altura de um triângulo eqüilátero cujo lado mede 6 cm.

$x^2 + 3^2 = 6^2 \Rightarrow x = \sqrt{27}$ ou $3\sqrt{3}$

Resp.: $3\sqrt{3}$ cm

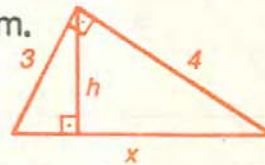
f) As diagonais de um losango medem 12 cm e 16 cm. Calcule a medida do lado do losango.

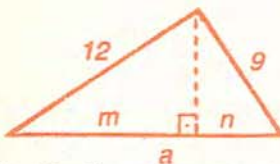
6
x
8

$x^2 = 6^2 + 8^2 \Rightarrow x = 10$

Resp.: 10 cm.

g) Calcule a altura relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo sabendo-se que os catetos medem 3 cm e 4 cm.

$x^2 = 3^2 + 4^2$
$x^2 = 25$
$x = 5$

3
4
h
x

$3 \cdot 4 = 5 \cdot h$
$5h = 12$
$h = 2{,}4$
Resp.: 2,4 cm.

h) Num triângulo retângulo os catetos medem 9 cm e 12 cm. Calcule as projeções dos catetos sobre a hipotenusa.

$a^2 = 9^2 + 12^2$
$a^2 = 225$
$a = 15$

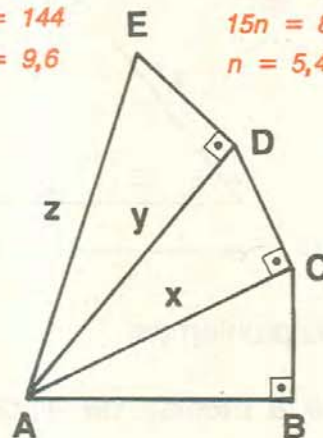
$12^2 = 15 \cdot m$
$15m = 144$
$m = 9{,}6$

$9^2 = 15 \cdot n$
$15n = 81$
$n = 5{,}4$

Resp.: 9,6 cm e 5,4 cm.

5) Na figura ao lado temos:

AB = BC = CD = DE = 3

Calcule x, y e z.

$x = 3\sqrt{2}$
$y = 3\sqrt{3}$
$z = 6$

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1) Calcule x nas figuras abaixo:

a)

$x = 3$

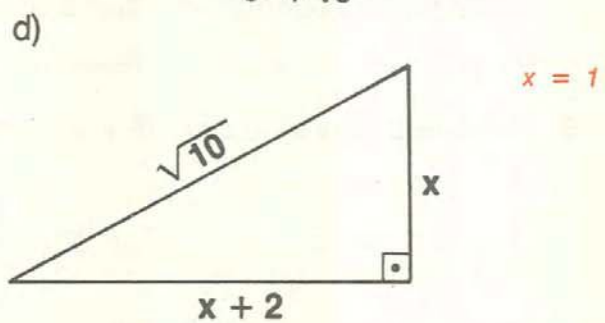
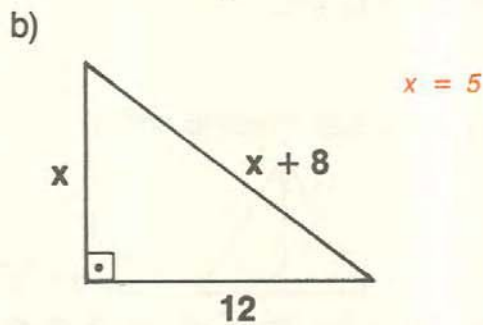
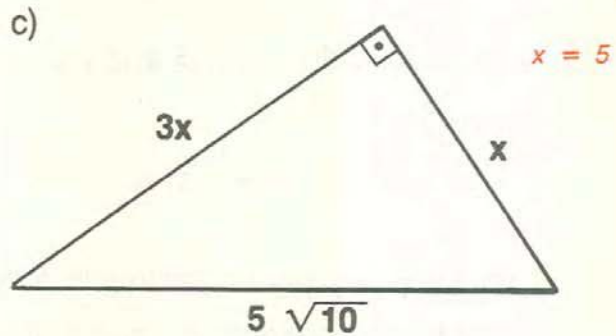
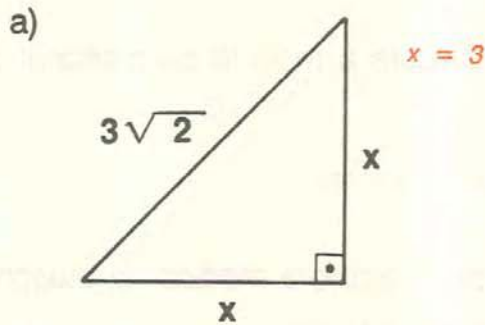
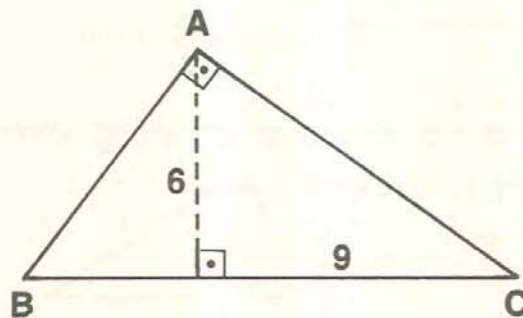
c)

$x = 5$

b)

$x = 5$

d)

$x = 1$

2) Quanto mede a hipotenusa do triângulo retângulo da figura?

$h^2 = m \cdot n$

$36 = n \cdot 9$

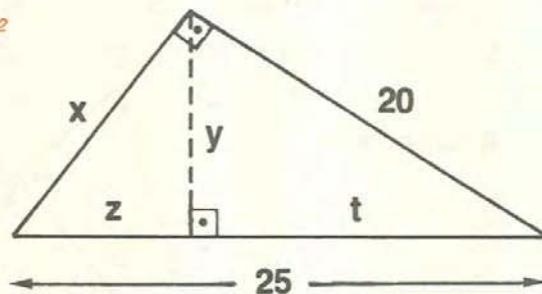
$n = 4$

Hipot $= 9 + 4 = 13$

3) Calcule x, y, z e t no triângulo retângulo da figura:

$x^2 + 20^2 = 25^2$

$x^2 = 225$

$x = 15$

$25 \cdot y = 15 \cdot 20$

$25y = 300$

$y = 12$

$15^2 = z \cdot 25$

$z = 9$

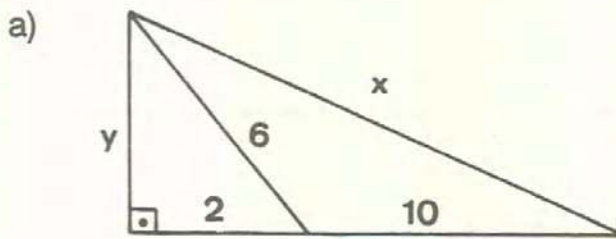
Logo: $t = 16$

4) Resolva os problemas:

a) Calcule a medida da hipotenusa de um triângulo retângulo, sabendo-se que os seus catetos medem 15 cm e 20 cm.

$x^2 = 15^2 + 20^2 \Rightarrow x = 25$ Resp.: 25 cm.

7) Calcule x:

a)

$y^2 + 2^2 = 6^2$

$y^2 = 32$

$y = \sqrt{32}$

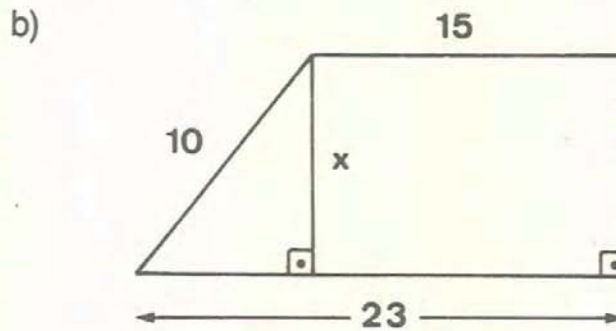
$y = 4\sqrt{2}$

$x^2 = (4\sqrt{2})^2 + 12^2$

$x^2 = 176$

$x = \sqrt{176}$

$x = 4\sqrt{11}$

b)

$x_1 = 23 - 15 = 8$

Logo: $x^2 + 8^2 = 10^2$

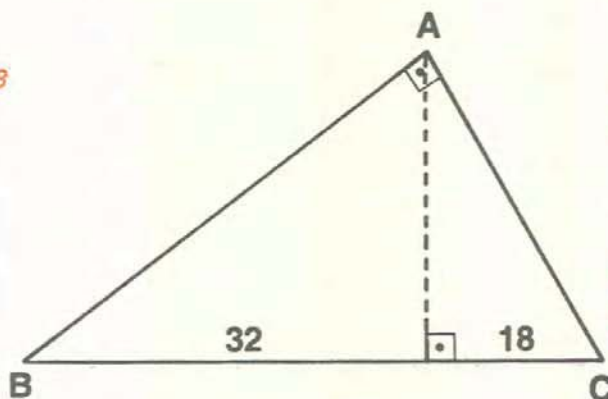
$x^2 = 36$

$x = 6$

8) Qual é o perímetro do triângulo retângulo da figura?

$h^2 = 32 \cdot 18$

$h^2 = 576$

$h = 24$

$(AB)^2 = 32^2 + 24^2$

$(AB)^2 = 1024 + 576$

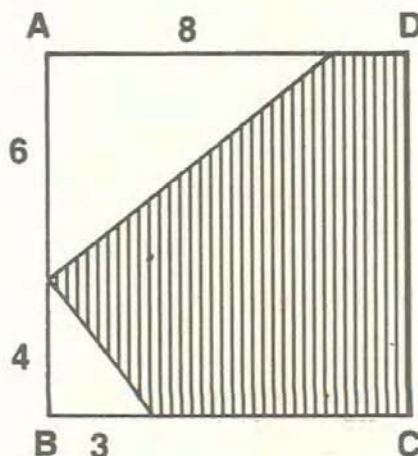
$AB = 40$

$(AC)^2 = 18^2 + 24^2$

$(AC)^2 = 324 + 576$

$AC = 30$

Resp.: $30 + 40 + 50 = 120$.

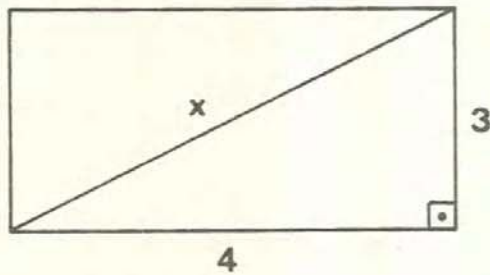
9) A figura ABCD é um quadrado de 10 cm de lado. Qual é o perímetro da figura tracejada?

$x^2 = 8^2 + 6^2 \Rightarrow x = 10$

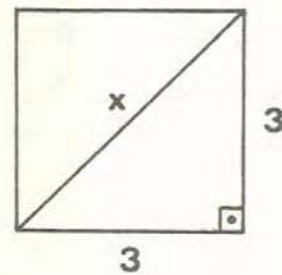
$y^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow y = 5$

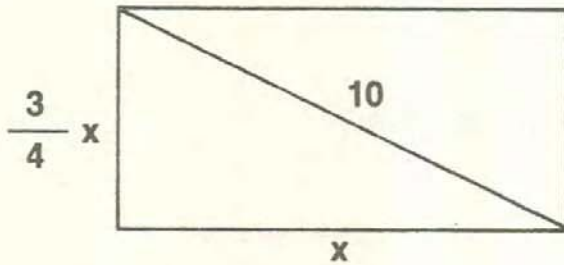
$P = 2 + 10 + 7 + 5 + 10$

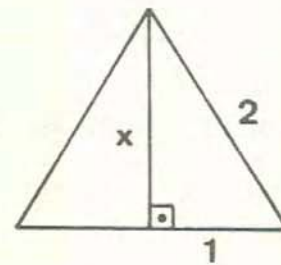
Resp.: 34 cm.

5) Utilizando o teorema de Pitágoras, calcule x:

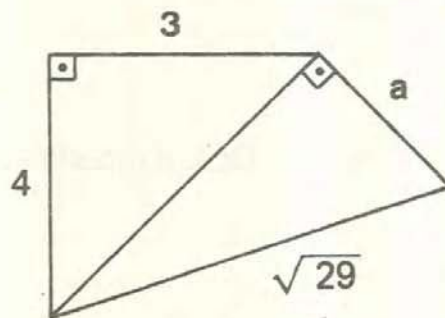
a)

$x^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow x = 5$

c)

$x^2 = 3^2 + 3^2 \Rightarrow x = 3\sqrt{2}$

b)

$\left(\frac{3}{4}x\right)^2 + x^2 = 10^2 \Rightarrow x = 8$

d)

$x^2 + 1^2 = 2^2 \Rightarrow x = \sqrt{3}$

6) Calcule a nas figuras abaixo:

a)

$x^2 = 3^2 + 4^2$

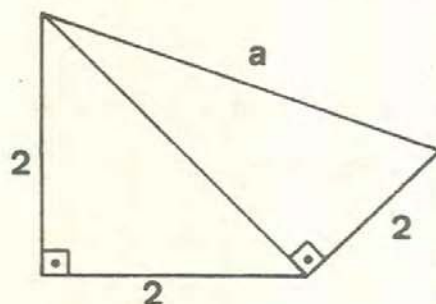
$x^2 = 25$

$x = 5$

$(\sqrt{29})^2 = a^2 + 5^2$

$a^2 = 4$

$a = 2$

b)

$x^2 = 2^2 + 2^2$

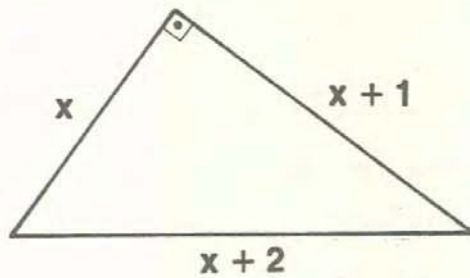
$x^2 = 8$

$x = 2\sqrt{2}$

$a^2 = 2^2 + (2\sqrt{2})^2$

$a^2 = 4 + 8$

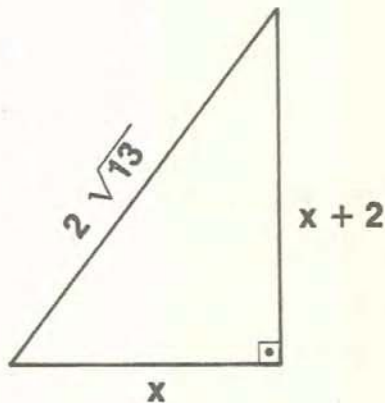
$a = \sqrt{12}$ ou $2\sqrt{3}$

e)

$x^2 + (x + 1)^2 = (x + 2)^2$

$x^2 + x^2 + 2x + 1 = x^2 + 4x + 4$

$x^2 - 2x - 3 = 0$

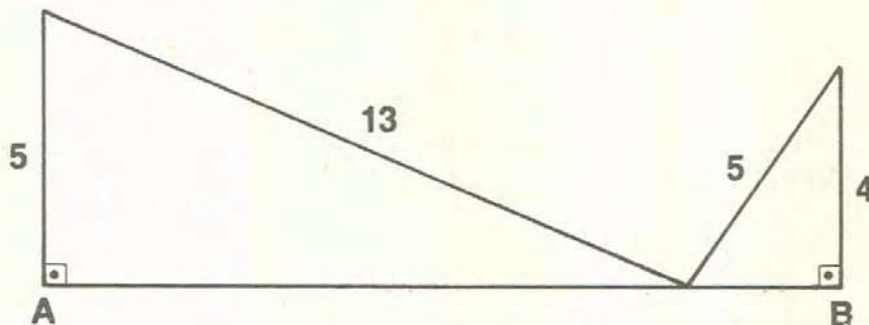
$\begin{cases} x' = 3 \\ x'' = -1 \text{ (não convém)} \end{cases}$

f)

$x^2 + (x + 2)^2 = (2\sqrt{13})^2$

$x^2 + x^2 + 4x + 4 = 52$

$x^2 + 2x - 24 = 0$

$\begin{cases} x' = 4 \\ x'' = -6 \text{ (não convém)} \end{cases}$

3) Na figura, calcule a distância de A a B.

$x^2 + 5^2 = 13^2$

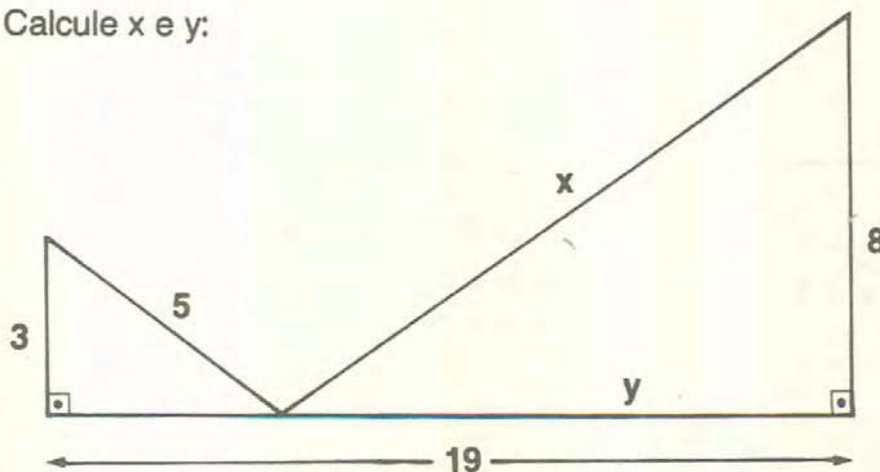
$x^2 = 144$

$x = 12$

$y^2 + 4^2 = 5^2$

$y^2 = 9$

$y = 3$

Resp.: $12 + 3 = 15$

4) Calcule x e y:

$c^2 + 3^2 = 5^2$

$c^2 = 16$

$c = 4$

$y = 19 - 4$

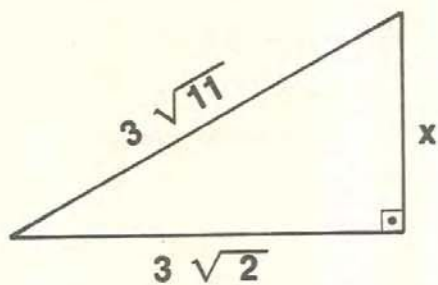
$y = 15$

$x^2 = 8^2 + 15^2$

$x^2 = 289$

$x = 17$

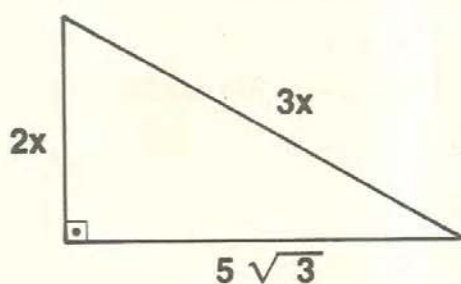
2) Calcule x nas figuras abaixo:

a)

$x^2 + (3\sqrt{2})^2 = (3\sqrt{11})^2$

$x^2 + 18 = 99$

$x^2 = 81$

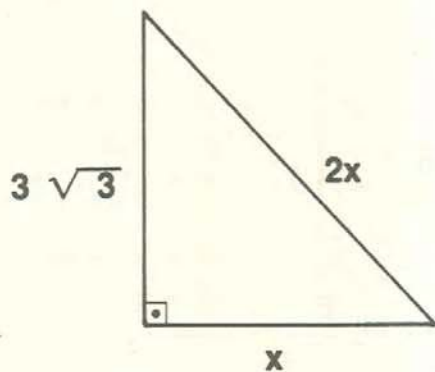
$x = 9$

b)

$(3x)^2 = (2x)^2 + (5\sqrt{3})^2$

$9x^2 = 4x^2 + 75$

$5x^2 = 75$

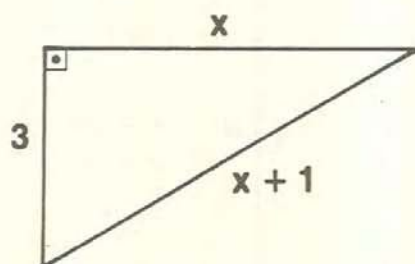
$x = \sqrt{15}$

c)

$(2x)^2 = x^2 + (3\sqrt{3})^2$

$4x^2 = x^2 + 27$

$3x^2 = 27$

$x = 3$

d)

$(x + 1)^2 = x^2 + 3^2$

$x^2 + 2x + 1 = x^2 + 9$

$2x = 8$

$x = 4$

EXERCÍCIOS

1) Consulte a tabela e encontre o valor de:

a) cos 18° *0,9511*
b) sen 18° *0,3090*
c) tg 18° *0,3249*
d) sen 20° *0,3420*
e) tg 39° *0,8098*
f) cos 41° *0,6561*

g) sen 42° *0,6691*
h) tg 60° *1,7321*
i) cos 54° *0,5878*
j) sen 68° *0,9272*
l) cos 75° *0,2588*
m) tg 80° *5,6713*

2) Consulte a tabela e responda:

a) Qual é o ângulo cujo cosseno vale 0,2756 ? *74°*
b) Qual é o ângulo cujo seno vale 0,2588 ? *15°*
c) Qual é o ângulo cuja tangente vale 0,6494 ? *33°*

3) Consulte a tabela e determine o ângulo x:

a) sen x = 0,2419 *x = 14°*
b) cos x = 0,9063 *x = 25°*
c) tg x = 0,7002 *x = 35°*

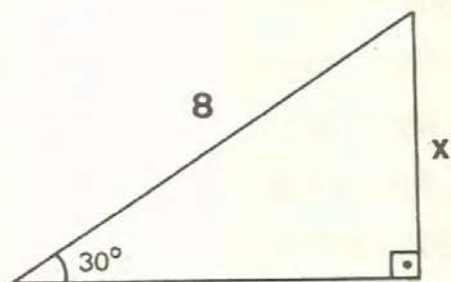
d) cos x = 0,4695 *x = 62°*
e) tg x = 1,2349 *x = 51°*
f) sen x = 0,9511 *x = 72°*

ÂNGULOS NOTÁVEIS

As razões trigonométricas dos ângulos de 30°, 45° e 60° aparecem freqüentemente nos problemas. Por isso, vamos apresentar essas razões na forma fracionária.

	30°	45°	60°
seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1 Calcular o valor de x no triângulo retângulo da figura abaixo.

Solução:

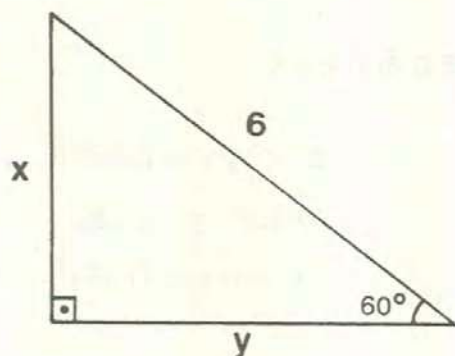
$$\text{sen } 30° = \frac{x}{8}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{x}{8}$$

$$2x = 8$$

$$x = 4$$

Resposta: 4

2 Calcular os catetos de um triângulo retângulo cuja hipotenusa mede 6 cm e um dos ângulos mede 60°.

Solução:

a) $\text{sen } 60° = \frac{x}{6}$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{6}$$

$$2x = 6\sqrt{3}$$

$$x = \frac{6\sqrt{3}}{2}$$

$$x = 3\sqrt{3}$$

b) $\cos 60° = \frac{y}{6}$

$$\frac{1}{2} = \frac{y}{6}$$

$$2y = 6$$

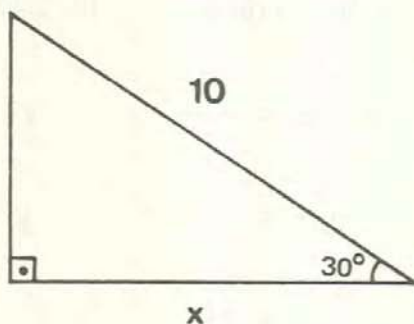
$$y = \frac{6}{2}$$

$$y = 3$$

Resposta: $x = 3\sqrt{3}$ cm e $y = 3$ cm

EXERCÍCIOS

1) Calcule o valor de x em cada um dos triângulos:

a)

$\cos 30° = \frac{x}{10}$

$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{10}$

$x = 5\sqrt{3}$

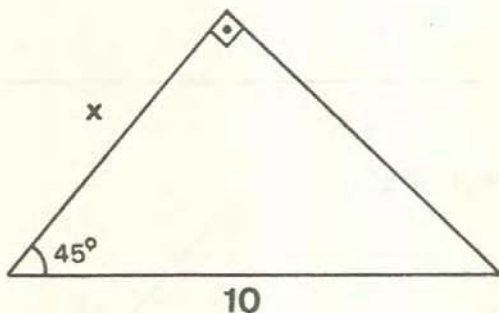
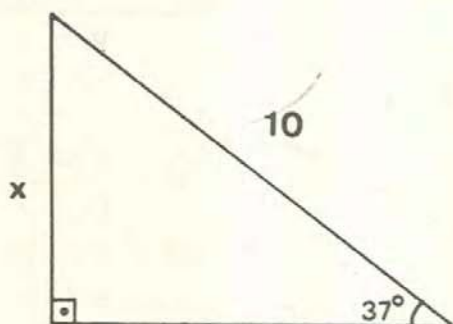
b)

$\cos 45° = \frac{x}{10}$

$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{x}{10}$

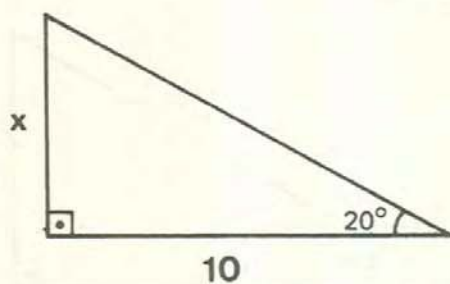
$x = 5\sqrt{2}$

c)

$\text{sen } 37° = \frac{x}{10}$

$x = 10 \cdot \text{sen } 37°$

$x = 10 \cdot 0{,}6018$

$x = 6{,}018$

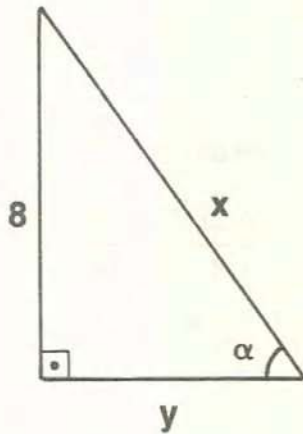
d)

$\text{tg } 20° = \frac{x}{10}$

$x = 10 \cdot \text{tg } 20°$

$x = 10 \cdot 0{,}3640$

$x = 3{,}640$

2) Na figura, $\text{sen}\,\alpha = \frac{4}{5}$. Calcule x e y.

Solução:

a) Cálculo de x:

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{8}{x}$$

$$\frac{4}{5} = \frac{8}{x}$$

$$4x = 40$$

$$x = 10$$

b) Cálculo de y:

$$y^2 + 8^2 = 10^2$$

$$y^2 + 64 = 100$$

$$y^2 = 36$$

$$y = 6$$

3) Na figura, $\cos\alpha = \frac{3}{5}$. Calcule x e y.

$$\cos\alpha = \frac{y}{15}$$

$$\frac{3}{5} = \frac{y}{15}$$

$$y = 9$$

$$x^2 + 9^2 = 15^2$$

$$x^2 + 81 = 225$$

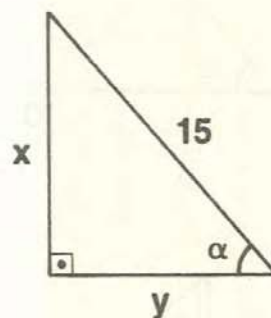
$$x^2 = 144$$

$$x = 12$$

x

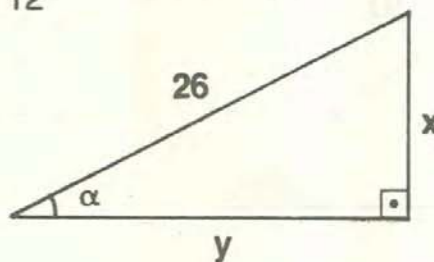
15

α

y

4) Na figura, $\text{tg}\,\alpha = \frac{5}{12}$. Calcule x e y.

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{x}{y}$$

$$\frac{5}{12} = \frac{x}{y}$$

$$y = \frac{12x}{5}$$

$$x^2 + \left(\frac{12x}{5}\right)^2 = 26^2$$

$$169\,x^2 = 16900$$

$$x = 10$$

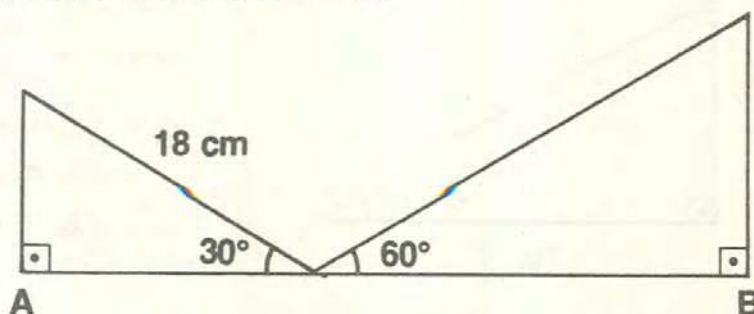
Então: $v = 24$

5) Na figura, calcule a distância de A a B.

$$\cos 30° = \frac{AP}{18}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AP}{18}$$

$$AP = 9\sqrt{3}$$

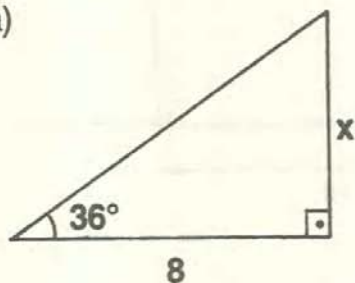
30 cm

$$\text{tg}\,60° = \frac{30}{PB}$$

$$\sqrt{3} = \frac{30}{PB}$$

$$PB = 10\sqrt{3}$$

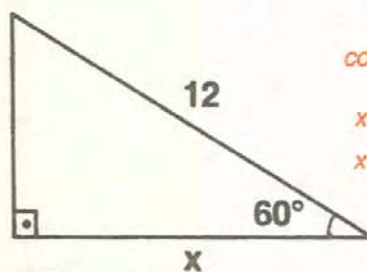
Então: $9\sqrt{3} + 10\sqrt{3} = 19\sqrt{3}$ Resp.: $19\sqrt{3}$

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1) Calcule o valor de x em cada um dos triângulos retângulos:

a)

$tg\,36° = \dfrac{x}{8}$

$x = 8 \,.\, 0{,}7265$

$x = 5{,}812$

b)

$\cos 60° = \dfrac{x}{12}$

$x = 12 \,.\, \cos 60°$

$x = 6$

2) Calcule x e y:

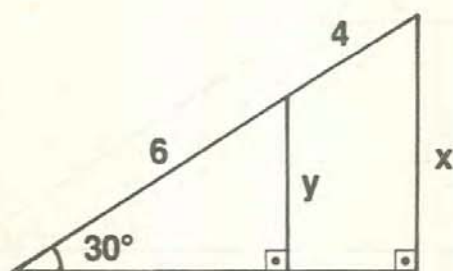
$sen\,30° = \dfrac{y}{6}$

$\dfrac{1}{2} = \dfrac{y}{6}$

$y = 3$

$sen\,30° = \dfrac{x}{10}$

$\dfrac{1}{2} = \dfrac{x}{10}$

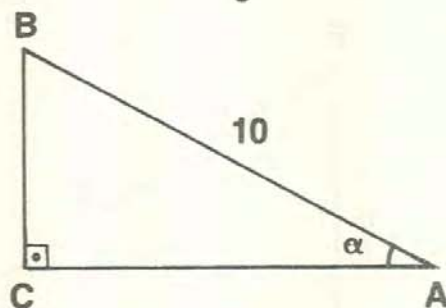
$x = 5$

3) (CESCEA - SP) Calcule a soma dos catetos do triângulo retângulo da figura, sabendo que $\overline{AB} = 10$ e $\cos\alpha = \dfrac{3}{5}$.

$\cos\alpha = \dfrac{AC}{10}$

$\dfrac{3}{5} = \dfrac{AC}{10}$

$AC = 6$

$(BC)^2 + 6^2 = 10^2$

$BC = 8$

Então: 6 + 8 = 14

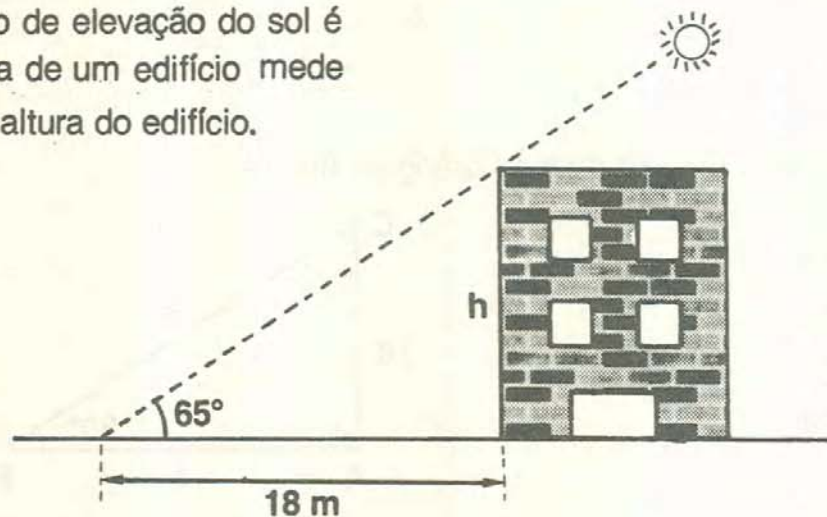
Resp.: 14.

4) Quando o ângulo de elevação do sol é de 65°, a sombra de um edifício mede 18 m. Calcule a altura do edifício.

$tg\,65° = \dfrac{h}{18}$

$h = 18 \,.\, 2{,}1445$

$h = 38{,}601$

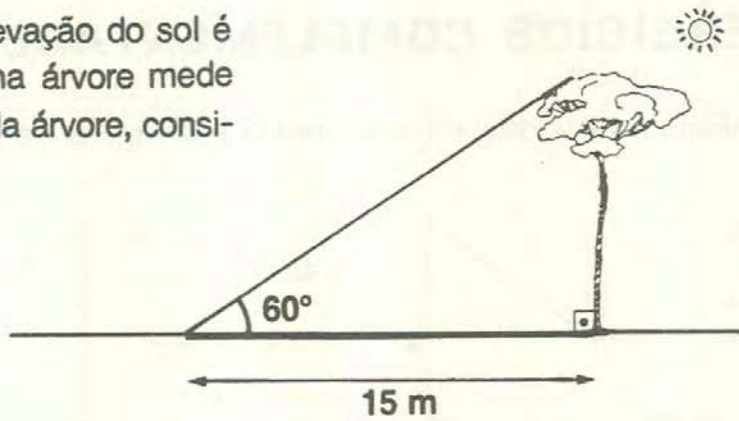
Resp.: 38,601 m

5) Quando o ângulo de elevação do sol é de 60°, a sombra de uma árvore mede 15 m. Calcule a altura da árvore, considerando $\sqrt{3} = 1,7$.

$tg\,60° = \dfrac{h}{15}$

$h = 15 \cdot tg\,60°$

$h = 15 \cdot \sqrt{3}$

$h = 15 \cdot 1,7$

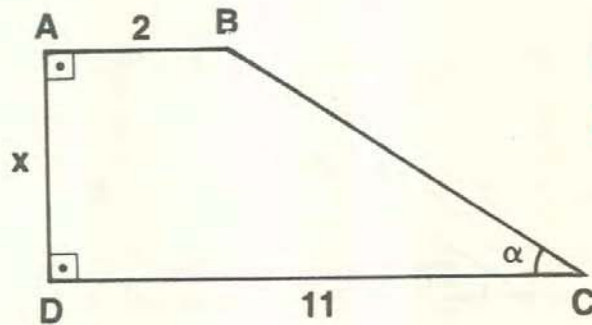
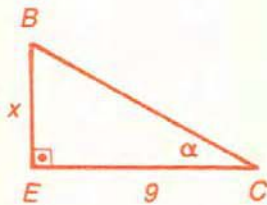
$h = 25,5$

Resp.: 25,5 m.

6) Na figura, $tg\,\alpha = \dfrac{1}{3}$. Calcule x.

No △ BEC:

$tg\,\alpha = \dfrac{x}{9}$

$\dfrac{1}{3} = \dfrac{x}{9}$

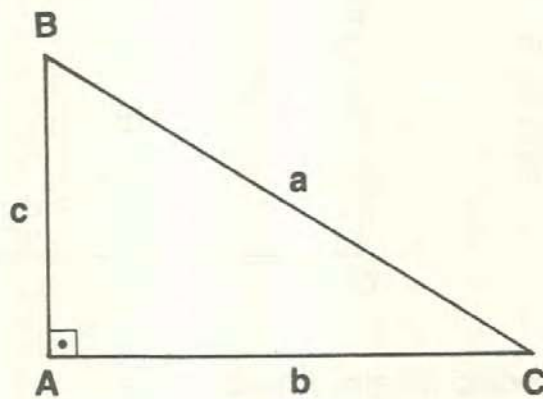
$x = 3$

TESTES

1) (UEPG - PR) Para o triângulo retângulo BAC, a relação correta é:

■ a) $sen\,\hat{B} = \dfrac{b}{a}$

b) $cos\,\hat{B} = \dfrac{b}{a}$

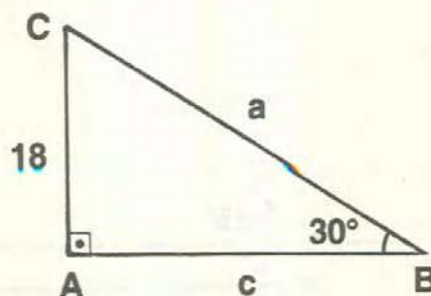
c) $tg\,\hat{B} = \dfrac{c}{b}$

d) $tg\,\hat{C} = \dfrac{b}{c}$

2) (UF - MT) O valor de a no triângulo ABC é:

a) 32

■ b) 36

c) 30

d) 34

$sen\,30° = \dfrac{18}{a}$

$\dfrac{1}{2} = \dfrac{18}{a}$

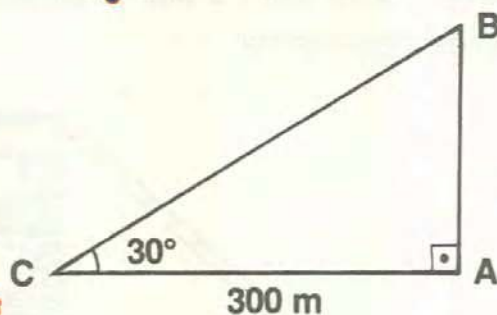
$a = 36$

3) (UB - DF) Sabendo que tg 30° $= \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, determine a medida do segmento $\overline{AB}$ na figura abaixo:

■ a) 173 m
b) 346 m
c) 100 m
d) 200 m

$tg\ 30° = \dfrac{AB}{300}$

$\dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{AB}{300}$

$AB = 100\sqrt{3} \cong 173$

4) Na figura abaixo, o valor da tangente do ângulo C é:

■ a) $\dfrac{4}{3}$

b) $\dfrac{3}{4}$

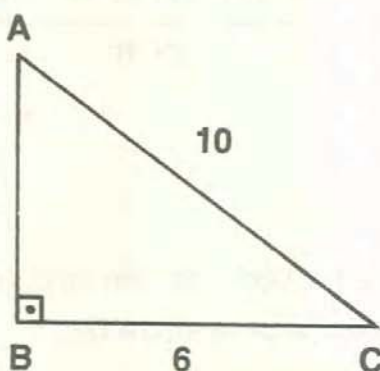
c) $\dfrac{5}{3}$

d) $\dfrac{3}{5}$

$(AB)^2 + 6^2 = 10^2$

$(AB)^2 = 64$

$AB = 8$

$tg\ \hat{C} = \dfrac{8}{6} = \dfrac{4}{3}$

5) (UF - Viçosa) O cosseno do ângulo α, assinalado na figura abaixo, é:

a) $\dfrac{1}{2}$

b) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

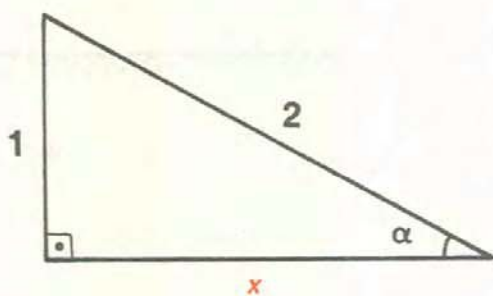
■ c) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

d) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$x^2 + 1^2 = 2^2$

$x^2 = 3$

$x = \sqrt{3}$

$\cos \alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

6) Na figura abaixo, o seno do ângulo α é $\dfrac{2}{3}$. Então, o valor de x é:

a) 6
■ b) 8
c) 9
d) 10

$sen\ \alpha = \dfrac{x}{12}$

$\dfrac{2}{3} = \dfrac{x}{12}$

$x = 8$

x
12
α

7) Uma escada encostada em um edifício tem seus pés afastados a 50 m do edifício, formando assim, com o plano horizontal, um ângulo de 32°. A altura do edifício é aproximadamente:

$$tg\ 32° = \frac{x}{50}$$
$$x = 50 \ .\ tg\ 32°$$
$$x = 50 \ .\ 0,6249$$
$$x \simeq 31,24$$

a) 28,41 m
b) 29,87 m
■ c) 31,24 m
d) 34,45 m

8) Um avião levanta vôo sob um ângulo de 30°. Depois de percorrer 8 km, o avião se encontra a uma altura de:

$$sen\ 30° = \frac{x}{8}$$
$$\frac{1}{2} = \frac{x}{8}$$
$$x = 4$$

a) 2 km
b) 3 km
■ c) 4 km
d) 5 km

9) Na figura abaixo, o cosseno do ângulo α é $\frac{3}{5}$. Então, a soma dos catetos do triângulo retângulo é:

a) 10
b) 12
■ c) 14
d) 16

$$\cos \alpha = \frac{x}{10}$$
$$\frac{3}{5} = \frac{x}{10}$$
$$x = 6$$

10
y
α
x

$$y^2 + 6^2 = 10^2$$
$$y^2 = 64$$
$$y = 8$$

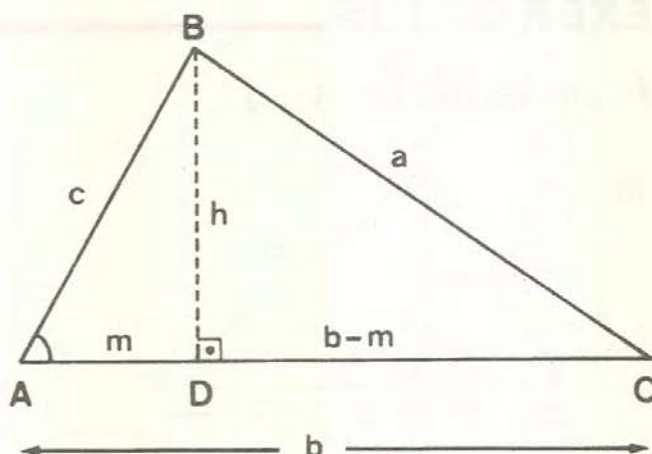
18

RELAÇÕES MÉTRICAS NUM TRIÂNGULO QUALQUER

TEOREMA – LADO OPOSTO A ÂNGULO AGUDO

O quadrado da medida do lado oposto a um ângulo **agudo** é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados, menos duas vezes o produto da medida de um desses lados pela medida da projeção do outro sobre ele.

H { $\hat{A}$ é agudo

T { $a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bm$

Demonstração:

No △ BCD: $a^2 = h^2 + (b - m)^2$ (Pitágoras)

$a^2 = h^2 + b^2 - 2\,bm + m^2$ ❶

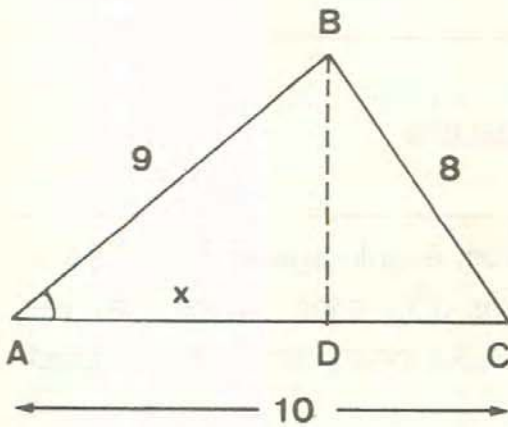
No △ BAD: $h^2 = c^2 - m^2$ ❷ (Pitágoras)

Substituindo ❷ em ❶, resulta:

$$a^2 = c^2 - \cancel{m^2} + b^2 - 2\,bm + \cancel{m^2}$$

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bm}$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

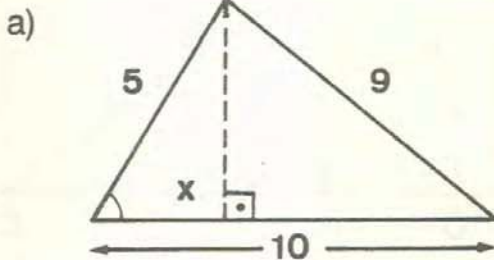
Na figura abaixo, calcular o valor de x.

Solução:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bm$$

$$8^2 = 10^2 + 9^2 - 2 \cdot 10 \cdot x$$
$$64 = 100 + 81 - 20x$$
$$20x = 181 - 64$$
$$20x = 117$$
$$x = \frac{117}{20} = 5{,}85$$

EXERCÍCIOS

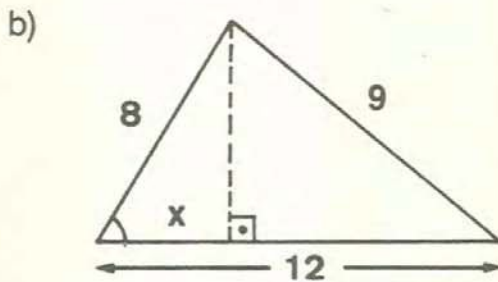
Nas figuras abaixo, calcule x:

a)

$9^2 = 10^2 + 5^2 - 2 \cdot 10 \cdot x$

$81 = 100 + 25 - 20x$

$20x = 44$

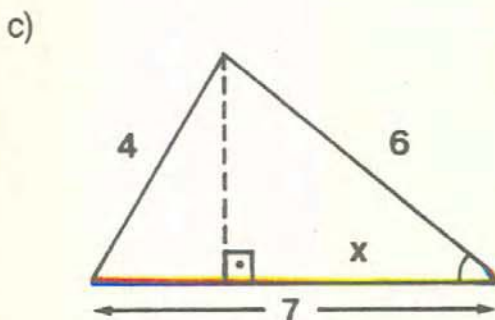
$x = 2{,}2$

b)

$9^2 = 12^2 + 8^2 - 2 \cdot 12 \cdot x$

$81 = 144 + 64 - 24x$

$24x = 127$

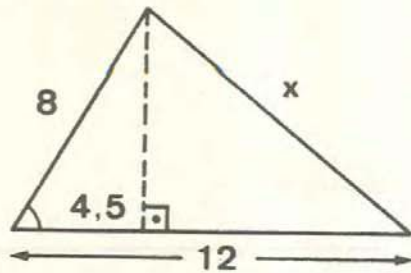
$x = \frac{127}{24}$

c)

$4^2 = 7^2 + 6^2 - 2 \cdot 7 \cdot x$

$16 = 49 + 36 - 14x$

$14x = 69$

$x = \frac{69}{14}$

d)

$x^2 = 12^2 + 8^2 - 2 \cdot 12 \cdot 4,5$

$x^2 = 144 + 64 - 108$

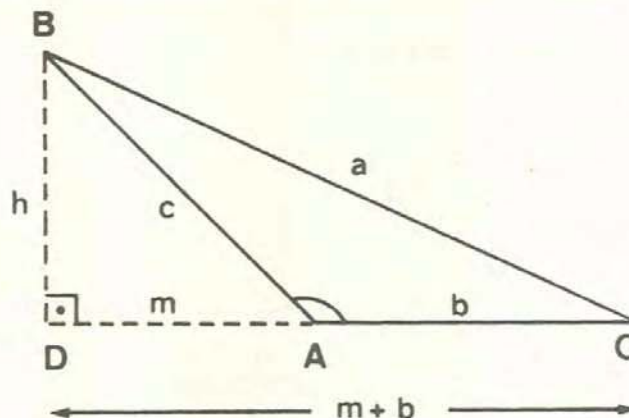
$x^2 = 100$

$x = 10$

TEOREMA – LADO OPOSTO A ÂNGULO OBTUSO

O quadrado da medida do lado oposto ao ângulo **obtuso** é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados, mais duas vezes o produto da medida de um desses lados pela medida da projeção do outro sobre ele.

H { $\hat{A}$ é obtuso

T { $a^2 = b^2 + c^2 + 2\,bm$

Demonstração:

No △ BCD: $a^2 = h^2 + (m + b)^2$ (Pitágoras)

$a^2 = h^2 + m^2 + 2\,bm + b^2$ ❶

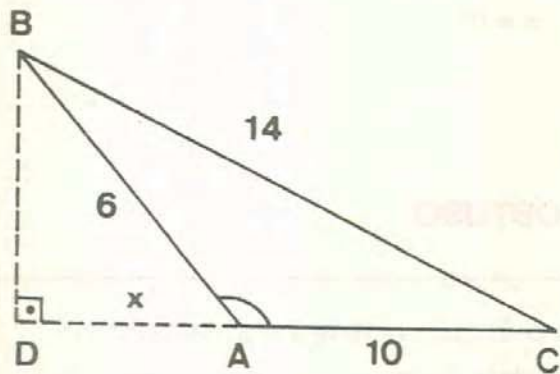
No △ BDA: $h^2 = c^2 - m^2$ ❷ (Pitágoras)

Substituindo ❷ em ❶, resulta:

$$a^2 = c^2 - \cancel{m^2} + \cancel{m^2} + 2\,bm + b^2$$

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 + 2\,bm}$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

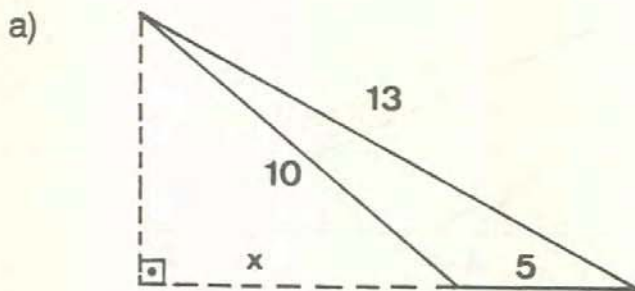
Na figura abaixo, calcular o valor de x.

Solução:

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2\,bm$$

$$14^2 = 10^2 + 6^2 + 2 \cdot 10 \cdot x$$
$$196 = 100 + 36 + 20x$$
$$196 = 136 + 20x$$
$$20x = 60$$
$$x = 3$$

EXERCÍCIOS

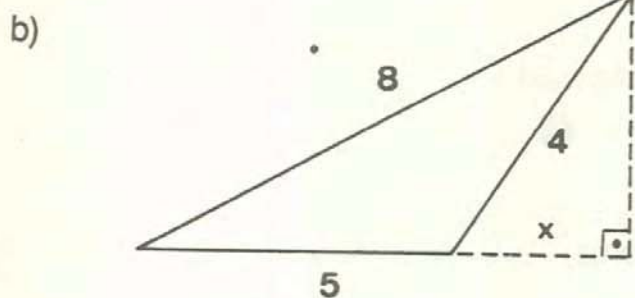
Nas figuras abaixo, calcule x:

a)

$13^2 = 10^2 + 5^2 + 2 \cdot 5 \cdot x$

$169 = 100 + 25 + 10x$

$10x = 44$

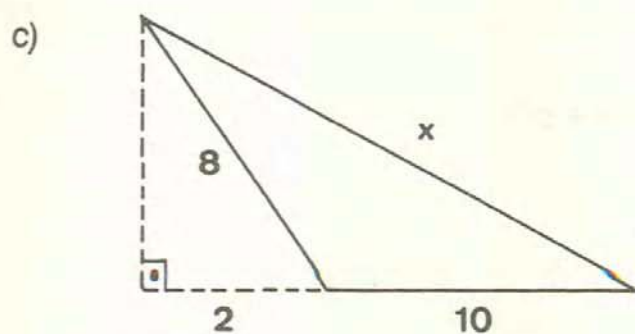
$x = 4{,}4$

b)

$8^2 = 4^2 + 5^2 + 2 \cdot 5 \cdot x$

$64 = 16 + 25 + 10x$

$10x = 23$

$x = 2{,}3$

c)

$x^2 = 8^2 + 10^2 + 2 \cdot 10 \cdot 2$

$x^2 = 64 + 100 + 40$

$x^2 = 204$

$x = \sqrt{204}$ ou $2\sqrt{51}$

NATUREZA DE UM TRIÂNGULO

Podemos estabelecer o seguinte critério para classificar triângulos quanto aos ângulos:

Sendo **a** a medida do maior lado, temos:

1. $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow \triangle$ retângulo
2. $a^2 < b^2 + c^2 \Rightarrow \triangle$ acutângulo
3. $a^2 > b^2 + c^2 \Rightarrow \triangle$ obtusângulo

Exemplos:

1. Um triângulo cujos lados medem 3 cm, 4 cm e 5 cm é **retângulo.**

   Justificando: $5^2 = 3^2 + 4^2$

   $25 = 9 + 16$

   $25 = 25$

2. Um triângulo cujos lados medem 4 cm, 5 cm e 6 cm é **acutângulo.**

   Justificando: $6^2 < 4^2 + 5^2$

   $36 < 16 + 25$

   $36 < 41$

3. Um triângulo cujos lados medem 4 cm, 2 cm e 5 cm é **obtusângulo.**

   Justificando: $5^2 > 4^2 + 2^2$

   $25 > 16 + 4$

   $25 > 20$

EXERCÍCIOS

Classificar quanto aos ângulos os triângulos cujos lados medem:

a) 5 cm, 8 cm e 7 cm *Acutângulo*

b) 3 cm, 7 cm e 5 cm *Obtusângulo*

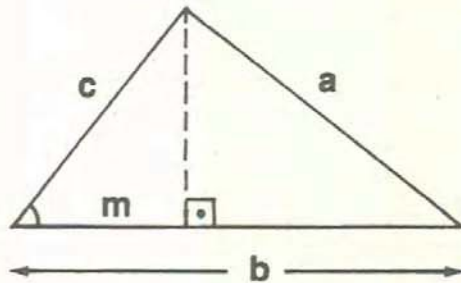
c) 15 cm, 9 cm e 12 cm *Retângulo*

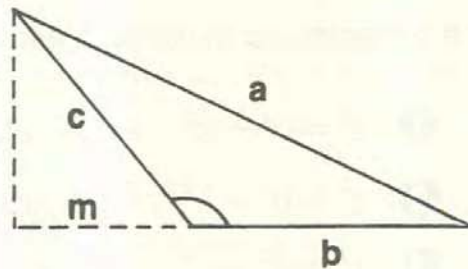
d) 12 cm, 8 cm e 9 cm *Acutângulo*

e) 8 cm, 15 cm e 17 cm *Retângulo*

f) 7 cm, 10 cm e 4 cm *Obtusângulo*

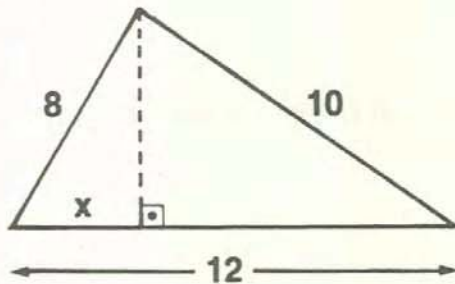
RESUMO

❶ Lado oposto a ângulo **agudo.**

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bm$$

❷ Lado oposto a ângulo **obtuso.**

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2\,bm$$

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

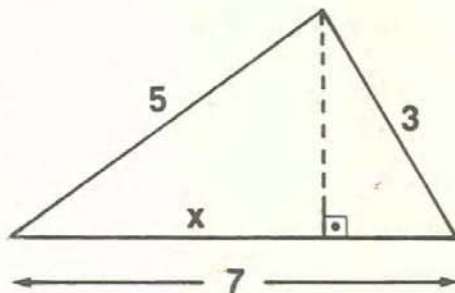
Nas figuras abaixo, calcule x:

a)

$10^2 = 12^2 + 8^2 - 2 \cdot 12 \cdot x$

$100 = 144 + 64 - 24x$

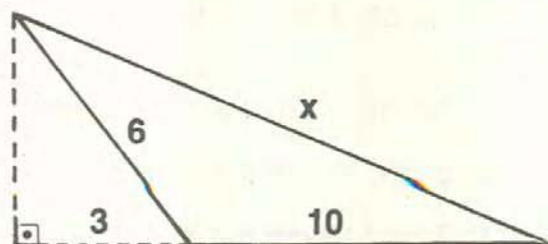
$24x = 108$

$x = 4{,}5$

b)

$3^2 = 7^2 + 5^2 - 2 \cdot 7 \cdot x$

$9 = 49 + 25 - 14x$

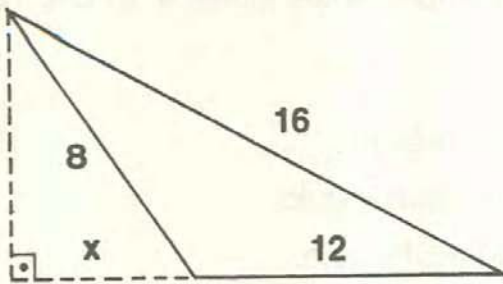
$x = \frac{65}{14}$

c)

$x^2 = 10^2 + 6^2 + 2 \cdot 10 \cdot 3$

$x^2 = 100 + 36 + 60$

$x^2 = 196$

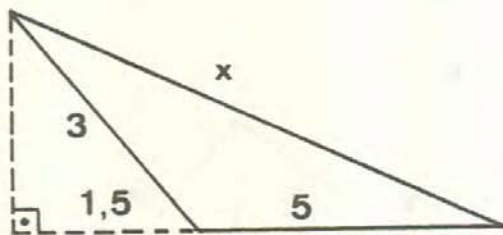
$x = 14$

d)

$16^2 = 12^2 + 8^2 + 2 . 12 . x$

$256 = 144 + 64 + 24x$

$24x = 48$

$x = 2$

e)

$x^2 = 5^2 + 3^2 + 2 . 5 . 1,5$

$x^2 = 25 + 9 + 15$

$x^2 = 49$

$x = 7$

TESTES

1) O triângulo cujos lados medem 5 cm, 12 cm e 13 cm:

a) é acutângulo
■ b) é retângulo
c) é obtusângulo
d) não existe

$13^2 . . . 5^2 + 12^2$

$169 . . . 25 + 144$

$169 = 169$

2) O triângulo cujos lados medem 11 cm, 6 cm e 9 cm:

a) é acutângulo
b) é retângulo
■ c) é obtusângulo
d) não existe

$11^2 . . . 6^2 + 9^2$

$121 . . . 36 + 81$

$121 > 117$

3) (PUC - SP) O triângulo de lados 8, 15 e 17 tem:

■ a) um ângulo reto
b) dois ângulos retos
c) três ângulos agudos
d) um ângulo obtuso

$17^2 . . . 15^2 + 8^2$

$289 . . . 225 + 64$

$289 = 289$

4) (CESEP - PE) Com três segmentos e comprimentos iguais a 10 cm, 12 cm e 23 cm...

a) é possível formar apenas um triângulo retângulo.

b) é possível formar apenas um triângulo obtusângulo.

c) é possível formar apenas um triângulo acutângulo.

■ d) não é possível formar um triângulo.

5) No triângulo da figura abaixo, o valor de x é:

a) 6

■ b) 7

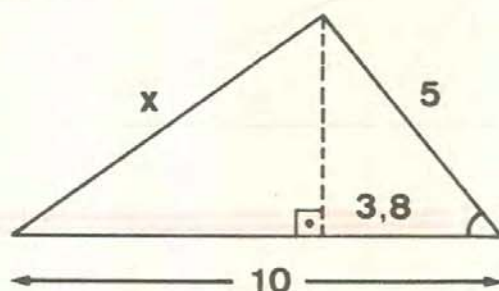
c) 8

d) 9

$x^2 = 10^2 + 5^2 - 2 \cdot 10 \cdot 3{,}8$

$x^2 = 100 + 25 - 76$

$x^2 = 49$

$x = 7$

6) No triângulo da figura abaixo, o valor de x é:

■ a) 7

b) 8

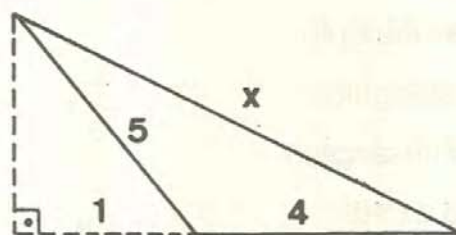
c) 9

d) 10

$x^2 = 5^2 + 4^2 + 2 \cdot 4 \cdot 1$

$x^2 = 25 + 16 + 8$

$x^2 = 49$

$x = 7$

7) O perímetro do triângulo ABC da figura é:

a) 22

b) 23

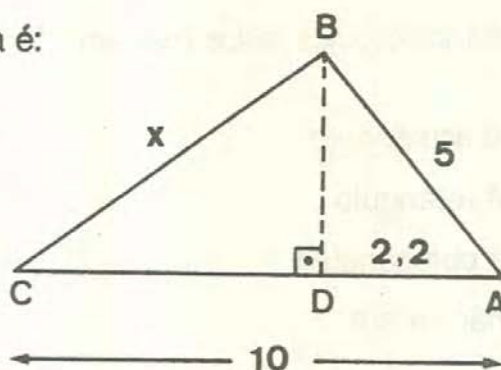
■ c) 24

d) 25

$x^2 = 10^2 + 5^2 - 2 \cdot 10 \cdot 2{,}2$

$x^2 = 100 + 25 - 44$

$x^2 = 81 \Rightarrow x = 9$

$P = 9 + 10 + 5 = 24$

8) O perímetro do triângulo EFG da figura é:

a) 32

b) 36

c) 38

■ d) 40

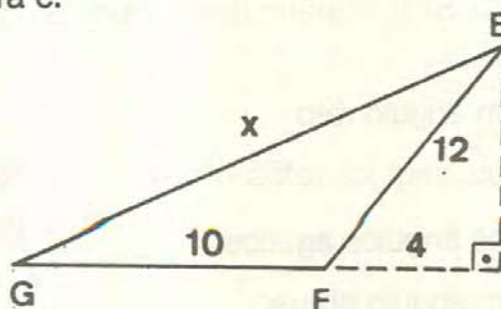
$x^2 = 10^2 + 12^2 + 2 \cdot 10 \cdot 4$

$x^2 = 100 + 144 + 80$

$x^2 = 324 \Rightarrow x = 18$

$P = 18 + 12 + 10 = 40$

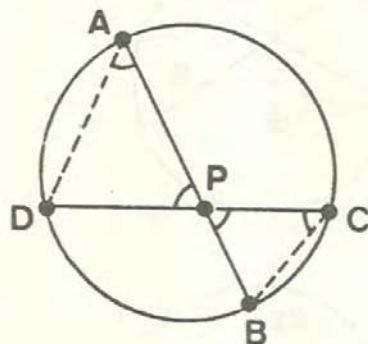
E
x
12
10
4
G
F

19

RELAÇÕES MÉTRICAS NA CIRCUNFERÊNCIA

TEOREMA

> Se duas cordas se cortam em um ponto interior da circunferência, então o produto das medidas dos segmentos determinados numa delas é igual ao produto das medidas dos segmentos determinados na outra.

H $\begin{cases} \overline{AB} \cap \overline{CD} = \{P\} \\ P \text{ é interior} \end{cases}$

T $\{ PA \cdot PB = PC \cdot PD$

Demonstração:

Considerando os triângulos PAD e PCB:

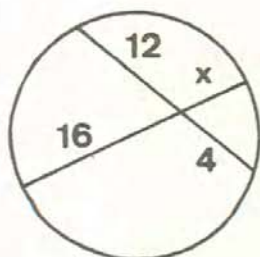
$\hat{P} \cong \hat{P}$ (opostos pelo vértice)

$\hat{A} \cong \hat{C}$ (ângulos inscritos de mesmo arco)

Logo, $\triangle$ PAD ~ $\triangle$ PCB.

Então: $\dfrac{PA}{PD} = \dfrac{PC}{PB} \Rightarrow \boxed{PA \cdot PB = PC \cdot PD}$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

Calcular o valor de **x** na figura:

Solução:

$16 \cdot x = 12 \cdot 4$

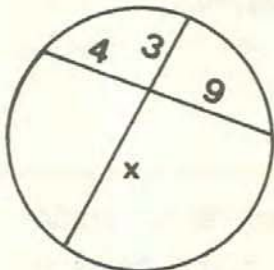
$16x = 48$

$x = \dfrac{48}{16}$

$x = 3$

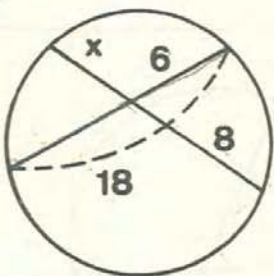
EXERCÍCIOS

Calcule o valor de x nas seguintes figuras:

a)

$3 \cdot x = 4 \cdot 9$

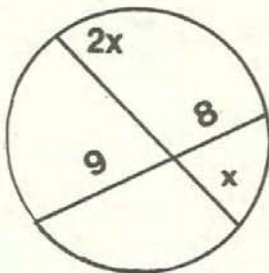
$3x = 36$

$x = 12$

b)

$8 \cdot x = 12 \cdot 6$

$8x = 72$

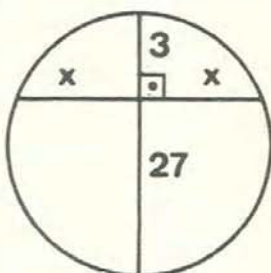
$x = 9$

c)

$2x \cdot x = 9 \cdot 8$

$2x^2 = 72$

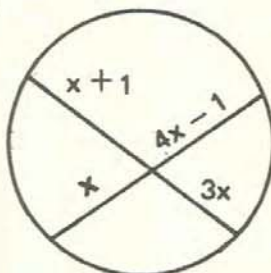
$x^2 = 36$

$x = 6$

d)

$x \cdot x = 3 \cdot 27$

$x^2 = 81$

$x = 9$

e)

$3x \cdot (x + 1) = x(4x - 1)$

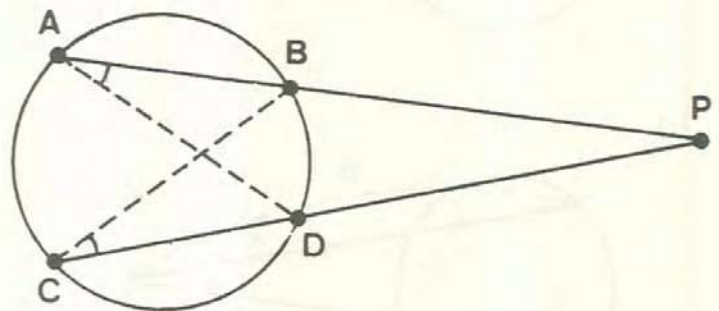
$3x^2 + 3x = 4x^2 - x$

$x^2 - 4x = 0$

$\begin{cases} x' = 4 \\ x'' = 0 \text{ (não convém)} \end{cases}$

TEOREMA

> Se de um ponto P que pertence ao exterior de uma circunferência traçarmos duas secantes que cortam a circunferência, respectivamente, nos pontos A, B e C, D, então:
>
> $$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

H $\begin{cases} \overline{PA} \text{ e } \overline{PC} \text{ são secantes} \\ P \text{ é exterior} \end{cases}$

T $\{ PA \cdot PB = PC \cdot PD$

Demonstração:

Considerando os triângulos PAD e PCB:

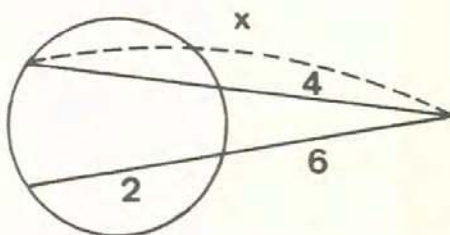
$\hat{P} = \hat{P}$ (ângulo comum)

$\hat{A} \cong \hat{C}$ (ângulos inscritos de mesmo arco)

Logo, $\triangle PAD \sim \triangle PCB$.

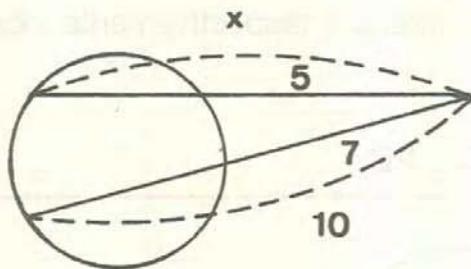
Então: $\dfrac{PA}{PD} = \dfrac{PC}{PB} \Rightarrow \boxed{PA \cdot PB = PC \cdot PD}$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

Calcular o valor de **x** na figura:

Solução:

$$x \cdot 4 = (2 + 6) \cdot 6$$
$$4x = 8 \cdot 6$$
$$4x = 48$$
$$x = \frac{48}{4}$$
$$x = 12$$

EXERCÍCIOS

Calcule o valor de x nas seguintes figuras:

a)

$x \cdot 5 = 10 \cdot 7$

$5x = 70$

$x = 14$

b)

$8 \cdot x = (9 + 3) \cdot 3$

$8x = 12 \cdot 3$

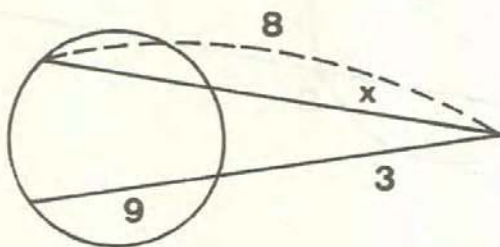
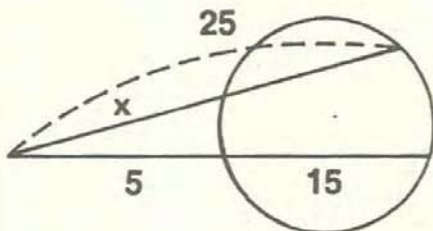
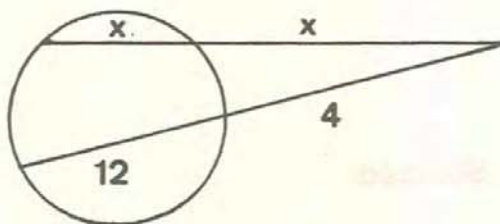
$8x = 36$

$x = 4,5$

c)

$25 \cdot x = (5 + 15) \cdot 5$

$25x = 100$

$x = 4$

d)

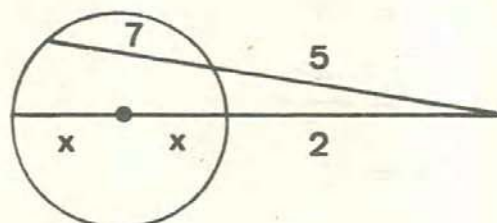
$(x + x) \cdot x = (4 + 12) \cdot 4$

$2x \cdot x = 16 \cdot 4$

$2x^2 = 64$

$x^2 = 32$

$x = \sqrt{32}$ ou $4\sqrt{2}$

e)

$(2 + x + x) \cdot 2 = (5 + 7) \cdot 5$

$(2 + 2x) \cdot 2 = 12 \cdot 5$

$4x = 60 - 4$

$4x = 56$

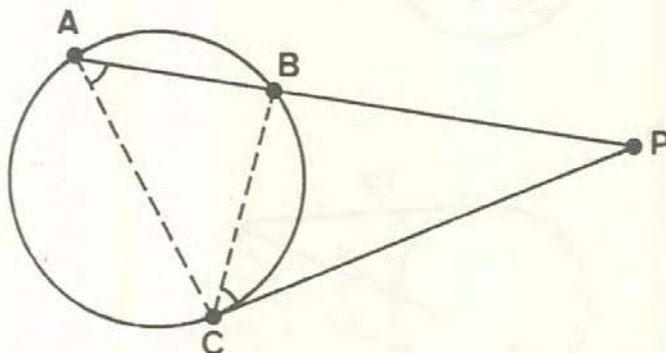
$x = 14$

TEOREMA

Se de um ponto P que pertence ao exterior de uma circunferência, traçarmos uma tangente e uma secante que encontram a circunferência, respectivamente, nos pontos C e A e B, então:

$$(PC)^2 = PA \cdot PB$$

$$H \begin{cases} P & \text{é exterior} \\ \overline{PC} & \text{é tangente} \\ \overline{PA} & \text{é secante} \end{cases}$$

$$T \left\{ (PC)^2 = PA \cdot PB \right.$$

Demonstração:

Considerando os triângulos PAC e PCB:

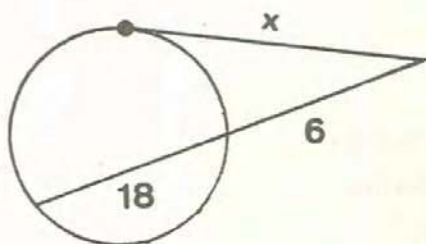
$\hat{P} = \hat{P}$ (ângulo comum)

$\hat{A} \cong \hat{C} \left(\dfrac{\widehat{BC}}{2}\right)$

Logo, $\triangle\ PAC \sim \triangle\ PCB$.

Então: $\dfrac{PA}{PC} = \dfrac{PC}{PB} \Rightarrow \boxed{(PC)^2 = PA \cdot PB}$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

Calcular o valor de **x** na figura:

Solução:

$x^2 = (18 + 6) \cdot 6$

$x^2 = 24 \cdot 6$

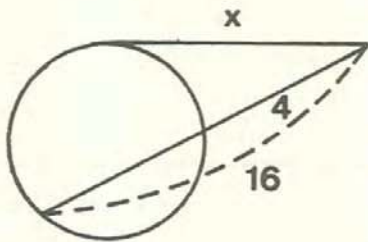
$x^2 = 144$

$x = \sqrt{144}$

$x = 12$

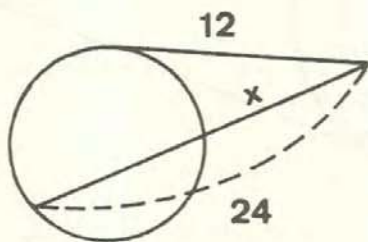
EXERCÍCIOS

Calcule o valor de x nas seguintes figuras:

a)

$x^2 = 16 \cdot 4$

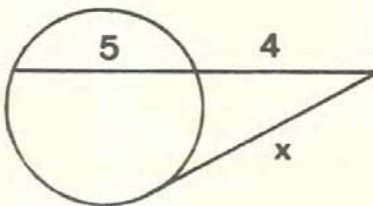
$x^2 = 64$

$x = 8$

b)

$12^2 = 24 \cdot x$

$24x = 144$

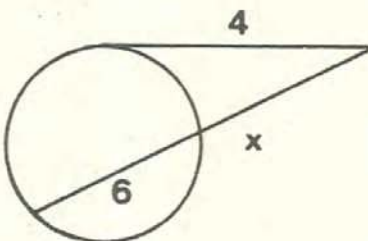
$x = 6$

c)

$x^2 = (5 + 4) \cdot 4$

$x^2 = 9 \cdot 4$

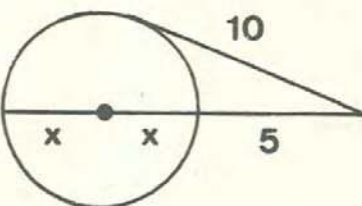
$x^2 = 36$

$x = 6$

d)

$4^2 = (6 + x) \cdot x$

$16 = 6x + x^2$

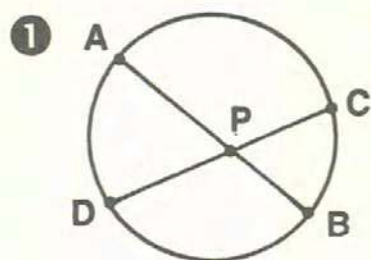
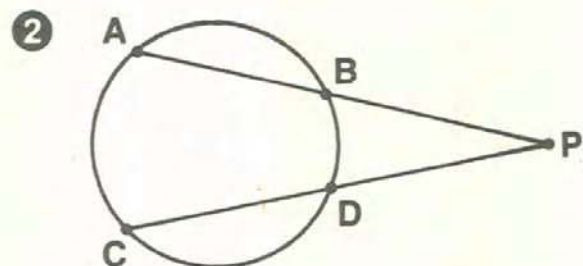
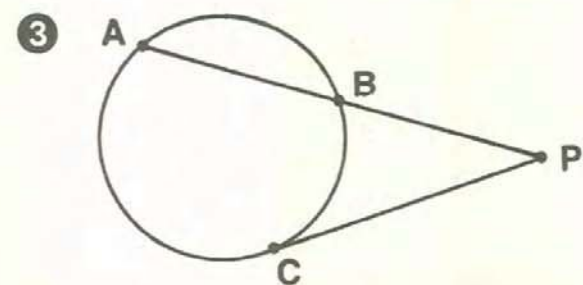
$x^2 + 6x - 16 = 0$ → $x' = 2$; $x'' = -8$ (não convém)

e)

$10^2 = 5(5 + x + x)$

$100 = 25 + 10x$

$10x = 75$

$x = 7{,}5$

RESUMO

PA . PB = PC . PD

PA . PB = PC . PD

$(PC)^2$ = PA . PB

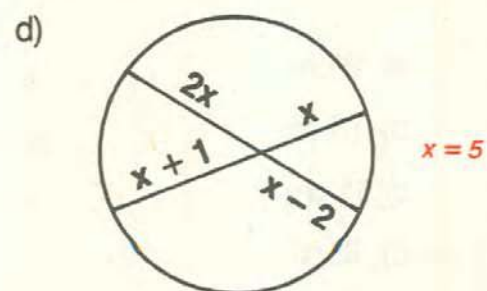
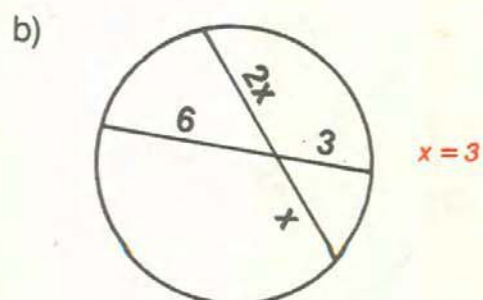
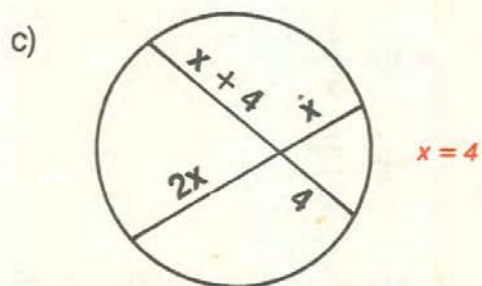
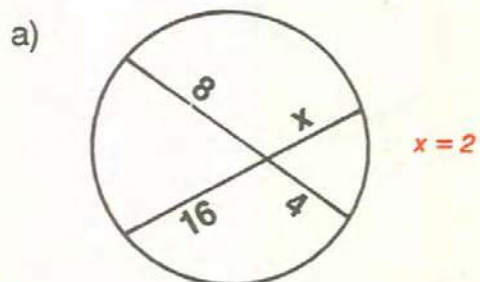
EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

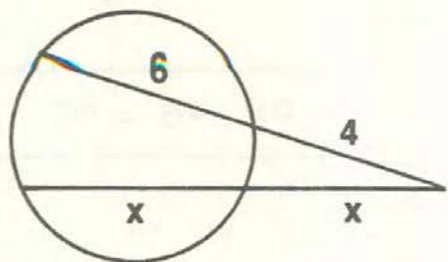
1) Calcule o valor de x nas seguintes figuras:

a)

c)

b)

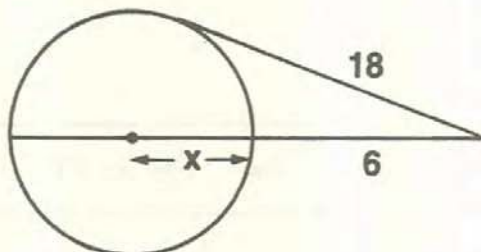
d)

2) Calcule o valor de x nas seguintes figuras:

a)

$(x + x) \cdot x = (6 + 4) \cdot 4$

$2x^2 = 40$

$x^2 = 20$

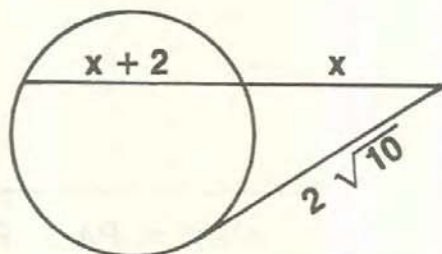
$x = 2\sqrt{5}$

b)

$6(6 + x + x) = 18^2$

$6(6 + 2x) = 324$

$12x + 36 = 324$

$x = 24$

c)

$(x + 2 + x) \cdot x = (2\sqrt{10})^2$

$(2x + 2) \cdot x = 4 \cdot 10$

$x^2 + x - 20 = 0$

$\begin{cases} x' = 4 \\ x'' = -5 \text{ (não convém)} \end{cases}$

TESTES

1) (FUVEST - SP) O valor de x na figura é:

a) 1

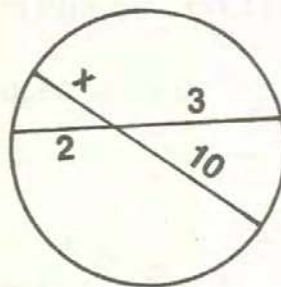
b) 4

■ c) $\frac{3}{5}$

d) $\frac{20}{3}$

$10 \cdot x = 3 \cdot 2$

$10x = 6$

$x = \frac{3}{5}$

2) Na circunferência abaixo, $\overline{PE} = 10$ cm, $\overline{PF} = 6$ cm e $\overline{PH} = 5$ cm. Então, $\overline{PG}$ mede:

a) 8 cm

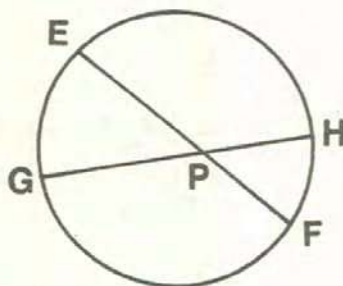
b) 10 cm

c) 11 cm

■ d) 12 cm

$x \cdot 5 = 10 \cdot 6$

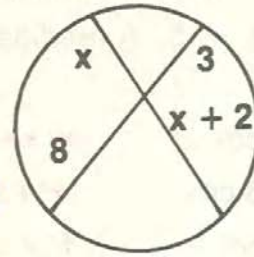
$5x = 60$

$x = 12$

3) (EPCAR - Barbacena - MG) Na figura abaixo, a soma das medidas das duas cordas é:

a) 20
■ b) 21
c) 24
d) 25

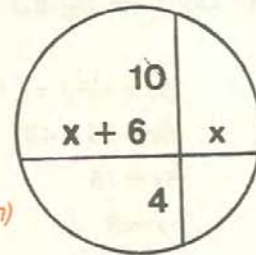
$x(x+2) = 3 \cdot 8$

$x^2 + 2x - 24 = 0$ → $x' = 4$; $x'' = -6$ (não convém)

$S = 4 + 6 + 3 + 8 = 21$

4) Na figura abaixo, o valor de x é:

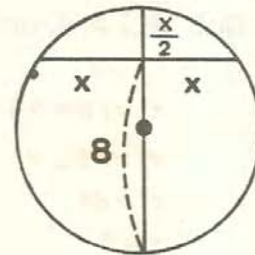
■ a) 4
b) 5
c) 6
d) 10

$x(x+6) = 10 \cdot 4$

$x^2 + 6x - 40 = 0$ → $x' = 4$; $x'' = -10$ (não convém)

5) Na figura abaixo, o valor de x é:

a) 3
■ b) 4
c) 3,5
d) 4,5

$x \cdot x = 8 \cdot \frac{x}{2}$

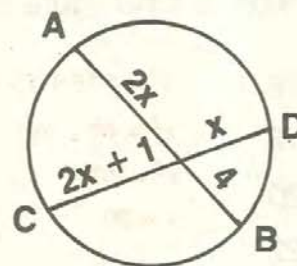
$x^2 - 4x = 0$ → $x' = 4$; $x'' = 0$ (não convém)

6) (FMU - SP) A medida da corda AB indicada na figura é:

a) 6
b) 8
■ c) 11
d) 23

$x(2x+1) = 4 \cdot 2x$

$2x^2 + x = 8x$

$2x^2 - 7x = 0$ → $x' = \frac{7}{2}$; $x'' = 0$ (não convém)

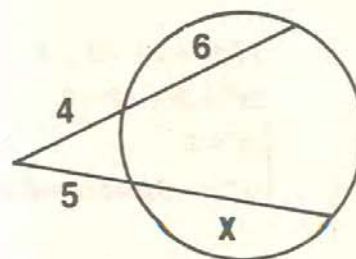
$AB = 2 \cdot \frac{7}{2} + 4 = 11$

7) (ETI - SP) O valor de x na figura é:

■ a) 3
b) 4,8
c) 7,5
d) $3\frac{1}{3}$

$4(6+4) = 5(x+5)$

$5x + 25 = 40$

$5x = 15$

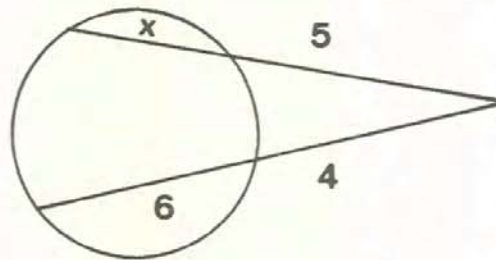
$x = 3$

8) Duas cordas interceptam-se no interior de uma circunferência. Os segmentos da primeira medem 4 cm e 6 cm e os da segunda são expressos por x e x + 5. A medida de x é:

a) 2 cm
b) 2,5 cm
■ c) 3 cm
d) 8 cm

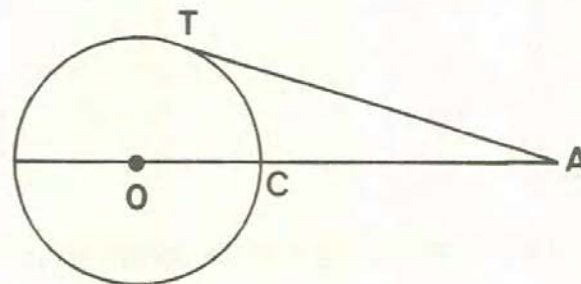
$x(x+5) = 4 \cdot 6$
$x^2 + 5x - 24 = 0$
$\begin{cases} x' = 3 \\ x'' = -8 \text{ (não convém)} \end{cases}$

9) O valor de x na figura é:

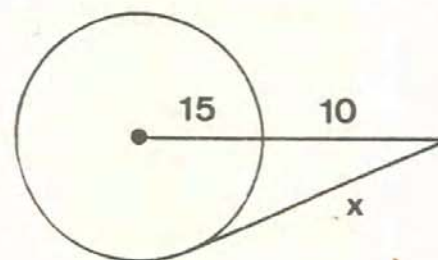
a) 2
■ b) 3
c) 4
d) 7

$5(x+5) = (4+6) \cdot 4$
$5x + 25 = 40$
$5x = 15$
$x = 3$

10) Na figura abaixo, $\overline{AT}$ é tangente à circunferência de raio igual a 6. Sabendo-se que $\overline{AC} = 4$, então o valor de $\overline{AT}$ é:

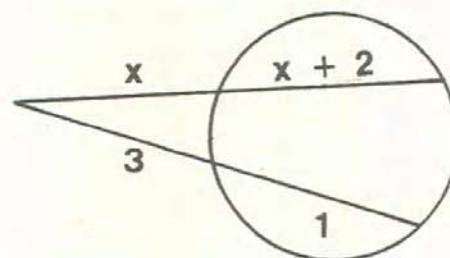
a) 7
■ b) 8
c) 9
d) 10

$x^2 = (6+6+4) \cdot 4$
$x^2 = 16 \cdot 4$
$x^2 = 64$
$x = 8$

11) O valor de x na figura é:

a) 16
b) 18
■ c) 20
d) 22

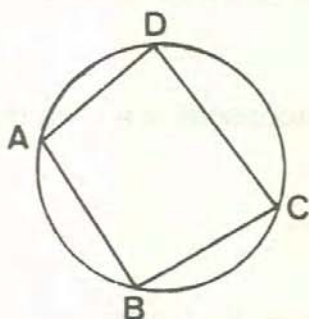
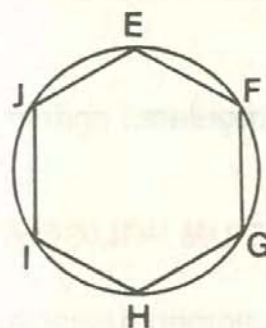
$x^2 = (15+15+10) \cdot 10$
$x^2 = 40 \cdot 10$
$x^2 = 400$
$x = 20$

12) O valor de x na figura é:

■ a) 2
b) 3
c) 4
d) 5

$x(2x+2) = 3 \cdot 4$
$2x^2 + 2x - 12 = 0$
$\begin{cases} x' = 2 \\ x'' = -3 \text{ (não convém)} \end{cases}$

POLÍGONOS REGULARES

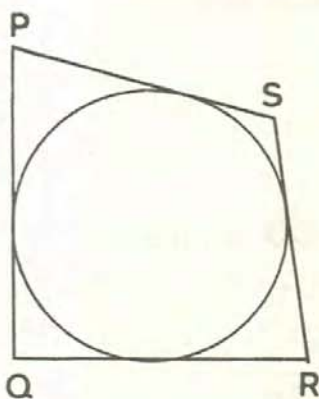
POLÍGONO INSCRITO NUMA CIRCUNFERÊNCIA

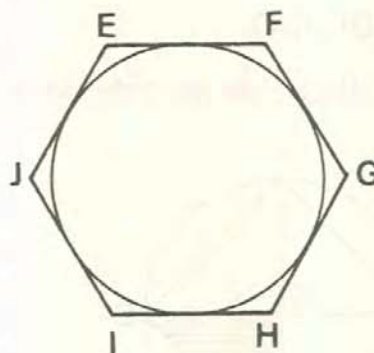
Dizemos que um polígono é **inscrito** quando todos os seus vértices pertencem à circunferência.

Veja:

Quadrilátero inscrito

Hexágono inscrito

A circunferência está circunscrita ao polígono.

POLÍGONO CIRCUNSCRITO A UMA CIRCUNFERÊNCIA

Dizemos que um polígono é **circunscrito** quando todos os seus lados são tangentes à circunferência.

Veja:

Quadrilátero circunscrito

Hexágono circunscrito

A circunferência está inscrita no polígono.

POLÍGONO REGULAR

Um polígono é **regular** quando tem os lados congruentes e os ângulos congruentes.

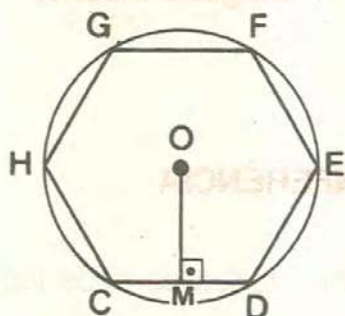
Veja:

- 4 lados congruentes.
- 4 ângulos congruentes.

- 3 lados congruentes.
- 3 ângulos congruentes.

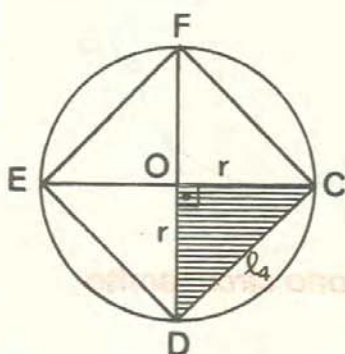
Os polígonos **regulares** podem ser inscritos ou circunscritos a uma circunferência.

APÓTEMA DE UM POLÍGONO REGULAR

Apótema é o segmento cujas extremidades são o centro e o ponto médio do lado.

$\overline{OM}$ é o *apótema*.

RELAÇÕES MÉTRICAS NOS POLÍGONOS REGULARES

1) QUADRADO

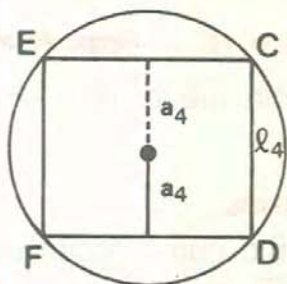
a) Cálculo da medida do lado (ℓ_4)

No Δ COD, temos:

$\ell_4^2 = r^2 + r^2$ (Teorema de Pitágoras)

$\ell_4^2 = 2r^2$

$\ell_4 = \sqrt{2r^2}$

$\boxed{\ell_4 = r\sqrt{2}}$

b) **Cálculo da medida do apótema (a_4)**

Na figura, observe que:

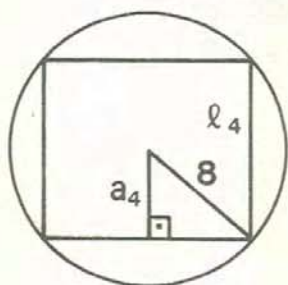
$$a_4 = \frac{\ell_4}{2}$$

Como $\ell_4 = r\sqrt{2}$

então: $$a_4 = \frac{r\sqrt{2}}{2}$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

Calcular a medida do lado e do apótema do quadrado inscrito numa circunferência de raio 8 cm.

Solução:

a) $\ell_4 = r\sqrt{2} \Rightarrow \ell_4 = 8\sqrt{2}$

b) $a_4 = \dfrac{r\sqrt{2}}{2} \Rightarrow a_4 = \dfrac{8\sqrt{2}}{2} \Rightarrow a_4 = 4\sqrt{2}$

Resposta: o lado mede $8\sqrt{2}$ cm e o apótema $4\sqrt{2}$ cm.

EXERCÍCIOS

1) Calcule o lado de um quadrado inscrito numa circunferência de raio de 6 cm.

$\ell_4 = r\sqrt{2} \Rightarrow \ell_4 = 6\sqrt{2}$ Resp.: $6\sqrt{2}$ cm.

2) Calcule o lado de um quadrado inscrito numa circunferência de raio de $5\sqrt{2}$ cm.

$\ell_4 = r\sqrt{2} \Rightarrow \ell_4 = 5\sqrt{2} . \sqrt{2} = 10$ Resp.: 10 cm.

3) Calcule o apótema de um quadrado inscrito numa circunferência de raio 5 $\sqrt{8}$ cm.

$a_4 = \frac{r\sqrt{2}}{2} \Rightarrow a_4 = \frac{5\sqrt{8}\cdot\sqrt{2}}{2} \Rightarrow a_4 = 10$ Resp.: 10 cm.

4) O lado de um quadrado inscrito numa circunferência mede 10 $\sqrt{2}$ cm. Calcule o raio da circunferência.

$\ell_4 = r\sqrt{2} \Rightarrow 10\sqrt{2} = r\sqrt{2} \Rightarrow r = 10$ Resp.: 10 cm.

5) Calcule o lado e o apótema de um quadrado inscrito numa circunferência de raio 12 $\sqrt{2}$ cm.

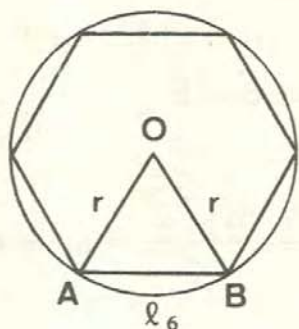
a) $\ell_4 = r\sqrt{2} \Rightarrow \ell_4 = 12\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} \Rightarrow \ell_4 = 24$ Resp.: 24 cm.

b) $a_4 = \frac{r\sqrt{2}}{2} = \frac{24}{2} = 12$ Resp.: 12 cm.

6) A medida do apótema de um quadrado inscrito numa circunferência é 15 cm. Calcule o raio da circunferência.

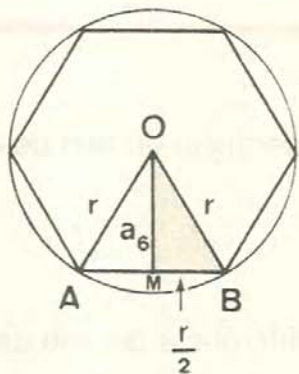
$a_4 = \frac{r\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 15 = \frac{r\sqrt{2}}{2} \Rightarrow r = \frac{30}{\sqrt{2}} = 15\sqrt{2}$ Resp.: $15\sqrt{2}$ cm.

2) HEXÁGONO REGULAR

a) Cálculo da medida do lado (ℓ_6)

O △ AOB é eqüilátero.
Logo: $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{AB}$

Então: $\ell_6 = r$

b) Cálculo da medida do apótema (a_6)

No △ MOB, temos: $a_6^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2 = r^2$ (Pitágoras)

$$a_6^2 = r^2 - \frac{r^2}{4}$$

$$a_6^2 = \frac{3r^2}{4}$$

$$a_6 = \sqrt{\frac{3r^2}{4}}$$

$$a_6 = \frac{r\sqrt{3}}{2}$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

Determinar a medida do lado e do apótema do hexágono regular inscrito numa circunferência de raio 8 cm.

Solução:

a) Como $\boxed{\ell_6 = r}$, então $\ell_6 = 8$

b) $\boxed{a_6 = \dfrac{r\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow a_6 = \dfrac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$

Resposta: o lado mede 8 cm e o apótema $4\sqrt{3}$ cm.

EXERCÍCIOS

1) Calcule as medidas do lado e do apótema de um hexágono regular inscrito numa circunferência de raio $12\sqrt{3}$ cm. *Resp.: $12\sqrt{3}$ cm; 18 cm.*

a) $\ell_6 = r \Rightarrow \ell_6 = 12\sqrt{3}$ *b)* $a_6 = \dfrac{r\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a_6 = \dfrac{12\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2} \Rightarrow a_6 = 18$

2) Determine o perímetro de um hexágono regular inscrito numa circunferência de 7 cm de raio.

$\ell_6 = r \Rightarrow \ell_6 = 7$ *Logo:* $P = 6 \cdot 7 = 42$ *Resp.: 42 cm.*

3) O apótema de um hexágono regular inscrito numa circunferência mede 15 cm. Quanto mede o seu lado?

$a_6 = \dfrac{r\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 15 = \dfrac{r\sqrt{3}}{2} \Rightarrow r = \dfrac{30}{\sqrt{3}} \Rightarrow r = 10\sqrt{3}$ *Resp.: $10\sqrt{3}$ cm.*

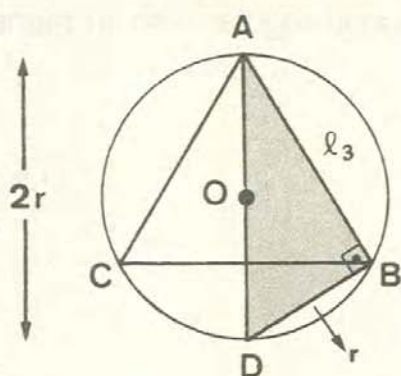
4) O lado de um hexágono regular inscrito numa circunferência mede $2\sqrt{27}$ cm. Quanto mede o seu apótema? *Resp.: 9 cm.*

a) $\ell_6 = r \Rightarrow r = 2\sqrt{27}$ *b)* $a_6 = \dfrac{r\sqrt{3}}{2} = \dfrac{2\sqrt{27} \cdot \sqrt{3}}{2} = \dfrac{2\sqrt{81}}{2} = 9$

5) O apótema de um hexágono regular mede $5\sqrt{3}$ cm. Determine o perímetro do hexágono. $a_6 = \dfrac{r\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 5\sqrt{3} = \dfrac{r\sqrt{3}}{2} \Rightarrow r = 10$

Como: $\ell_6 = r \Rightarrow \ell_6 = 10$ $P = 6 \cdot 10 = 60$ *Resp.: 60 cm.*

3) TRIÂNGULO EQÜILÁTERO

a) Cálculo da medida do lado (ℓ_3)

No △ ABD, temos:

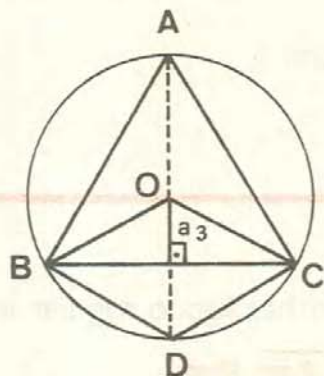
$\ell_3^2 + r^2 = (2r)^2$ (Teorema de Pitágoras)

$\ell_3^2 + r^2 = 4r^2$

$\ell_3^2 = 3r^2$

$\ell_3 = \sqrt{3r^2}$

$$\boxed{\ell_3 = r\sqrt{3}}$$

b) Cálculo da medida do apótema (a_3)

O quadrilátero BCDO é um losango, pois os lados são congruentes (medem r).

Logo: $a_3 = \dfrac{\overline{OD}}{2} \Rightarrow \boxed{a_3 = \dfrac{r}{2}}$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

Determine o lado e o apótema do triângulo eqüilátero inscrito numa circunferência de raio 10 cm.

Solução:

a) $\boxed{\ell_3 = r\sqrt{3}} \Rightarrow \ell_3 = 10\sqrt{3}$

b) $\boxed{a_3 = \dfrac{r}{2}} \Rightarrow a_3 = \dfrac{10}{2} = 5$

Resposta: o lado mede 10 $\sqrt{3}$ cm e o apótema 5 cm.

EXERCÍCIOS

1) Calcule o lado de um triângulo eqüilátero inscrito numa circunferência de raio $\sqrt{12}$ cm.

$\ell_3 = r\sqrt{3} \Rightarrow \ell_3 = \sqrt{12} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{36} = 6$ *Resp.: 6 cm.*

2) Calcule o apótema de um triângulo eqüilátero inscrito numa circunferência de raio 26 cm.

$a_3 = \frac{r}{2} \Rightarrow a_3 = \frac{26}{2} = 13$ *Resp.: 13 cm.*

3) O lado de um triângulo eqüilátero inscrito numa circunferência mede 12 cm. Calcule o raio da circunferência.

$\ell_3 = r\sqrt{3} \Rightarrow 12 = r\sqrt{3} \Rightarrow r = \frac{12}{\sqrt{3}} = \frac{12\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3}$ *Resp.: $4\sqrt{3}$ cm.*

4) O lado de um triângulo eqüilátero inscrito numa circunferência mede 18 cm. Quanto mede o seu apótema?

$\ell_3 = r\sqrt{3} \Rightarrow 18 = r\sqrt{3} \Rightarrow r = \frac{18}{\sqrt{3}} = \frac{18\sqrt{3}}{3} = 6\sqrt{3}$ *Resp.: $6\sqrt{3}$ cm.*

RESUMO:

Polígono inscrito	Lado	Apótema
Quadrado	$\ell_4 = r\sqrt{2}$	$a_4 = \frac{r\sqrt{2}}{2}$
Hexágono regular	$\ell_6 = r$	$a_6 = \frac{r\sqrt{3}}{2}$
Triângulo eqüilátero	$\ell_3 = r\sqrt{3}$	$a_3 = \frac{r}{2}$

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1) Calcule o lado de um quadrado inscrito numa circunferência de raio $3\sqrt{2}$ cm.

$\ell_4 = r\sqrt{2} \Rightarrow \ell_4 = 3\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 6$ *Resp.: 6 cm.*

2) Calcule o apótema de um quadrado inscrito numa circunferência de raio $7\sqrt{8}$ cm.

$a_4 = \frac{r\sqrt{2}}{2} \Rightarrow a_4 = \frac{7\sqrt{8} \cdot \sqrt{2}}{2} = 14$ *Resp.: 14 cm.*

3) O apótema de um hexágono regular inscrito numa circunferência mede 30 cm. Quanto mede o seu lado?

Resp.: $20\sqrt{3}$ cm.

$a_6 = \frac{r\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 30 = \frac{r\sqrt{3}}{2} \Rightarrow r = \frac{60}{\sqrt{3}} = 20\sqrt{3}$

4) O apótema de um triângulo eqüilátero inscrito numa circunferência mede 5 cm. Calcule o perímetro do triângulo eqüilátero.

Resp.: $30\sqrt{3}$ cm.

$a_3 = \frac{r}{2} \Rightarrow 5 = \frac{r}{2} \Rightarrow r = 10$ Então: $\ell_3 = 10\sqrt{3}$ $P = 3 \cdot 10\sqrt{3} = 30\sqrt{3}$

5) Calcule o perímetro de um triângulo eqüilátero inscrito em uma circunferência de raio $2\sqrt{3}$ cm.

$\ell_3 = r\sqrt{3} \Rightarrow \ell_3 = 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 2 \cdot 3 = 6$ $P = 3 \cdot 6 = 18$ Resp.: 18 cm.

TESTES

1) Numa circunferência está inscrito um triângulo eqüilátero cujo apótema mede 4 cm. A medida do diâmetro dessa circunferência é:

a) 8 cm

b) 12 cm

c) 14 cm

■ d) 16 cm

$a_3 = \frac{r}{2}$

$4 = \frac{r}{2}$

$r = 8$ Logo: $d = 2 \cdot 8 = 16$

2) O perímetro de um hexágono regular inscrito numa circunferência de 12 cm de diâmetro é:

a) 18 cm

b) 24 cm

c) 30 cm

■ d) 36 cm

$d = 12 \Rightarrow r = 6$

Como: $\ell_6 = r \Rightarrow \ell_6 = 6$

$P = 6 \times 6 = 36$

3) A medida do apótema de um hexágono regular inscrito numa circunferência de diâmetro $4\sqrt{3}$ cm é:

■ a) 3 cm

b) 4 cm

c) 5 cm

d) 6 cm

$d = 4\sqrt{3} \Rightarrow r = 2\sqrt{3}$

$a_6 = \frac{r\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a_6 = \frac{(2\sqrt{3}) \cdot \sqrt{3}}{2} = 3$

4) O perímetro de um hexágono regular cujo apótema mede 7 $\sqrt{3}$ cm é:

■ a) 84 cm
b) 86 cm
c) 88 cm
d) 90 cm

$a_6 = \frac{r\sqrt{3}}{2}$

$7\sqrt{3} = \frac{r\sqrt{3}}{2} \Rightarrow r = 14$ $P = 6 \times 14 = 84$

5) O perímetro de um quadrado inscrito numa circunferência cujo apótema mede 15 cm é:

a) 80 cm
b) 100 cm
■ c) 120 cm
d) 160 cm

$a_4 = \frac{r\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 15 = \frac{r\sqrt{2}}{2} \Rightarrow r = \frac{30}{\sqrt{2}} = 15\sqrt{2}$

$\ell_4 = r\sqrt{2} \Rightarrow \ell_4 = (15\sqrt{2}) \cdot (\sqrt{2}) \Rightarrow \ell_4 = 30$

$P_4 = 4 \times 30 = 120$

6) A medida do diâmetro de uma circunferência é 6 m. A medida do lado de um quadrado inscrito nessa circunferência é:

a) 6 $\sqrt{2}$ m
■ b) 3 $\sqrt{2}$ m
c) 6 $\sqrt{3}$ m
d) 6 m

$d = 6 \Rightarrow r = 3$

$\ell_4 = r\sqrt{2}$

$\ell_4 = 3\sqrt{2}$

7) O perímetro de um quadrado inscrito numa circunferência é 80 cm. Então, o raio da circunferência mede:

a) 5 $\sqrt{2}$ cm
b) 5 $\sqrt{3}$ cm
■ c) 10 $\sqrt{2}$ cm
d) 10 $\sqrt{3}$ cm

$\ell_4 = 80 : 4 = 20$

$\ell_4 = r\sqrt{2} \Rightarrow 20 = r\sqrt{2} \Rightarrow r = \frac{20}{\sqrt{2}} = 10\sqrt{2}$

8) A diagonal de um quadrado inscrito em uma circunferência mede 5 cm. Então, o lado do hexágono regular inscrito nessa mesma circunferência mede:

■ a) 2,5 cm
b) 3 cm
c) 3,5 cm
d) 4 cm

$\ell_4^2 + \ell_4^2 = 5^2$

$2\ell_4^2 = 25$

$\ell_4 = \frac{5}{\sqrt{2}}$

Então: $\ell_4 = r\sqrt{2}$

$\frac{5}{\sqrt{2}} = r\sqrt{2}$

$r = \frac{5}{2} = 2,5$

Como: $\ell_6 = r$

$\ell_6 = 2,5$

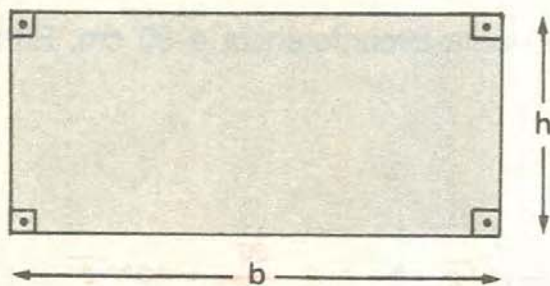
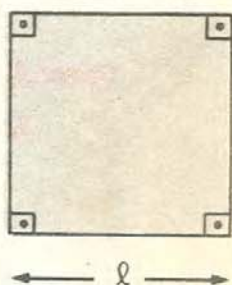
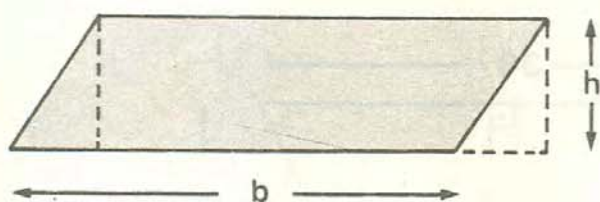
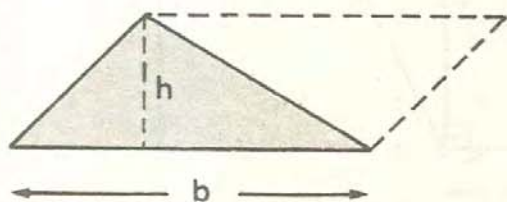
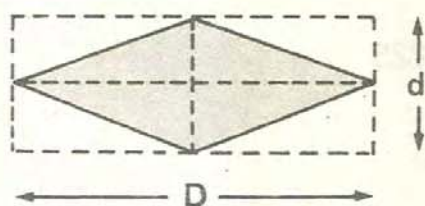
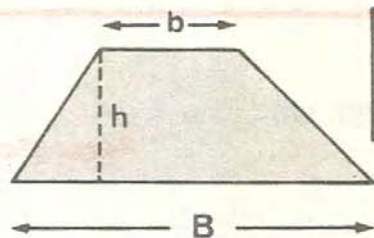
21

ÁREA DE POLÍGONOS

CONSIDERAÇÕES INICIAIS

- **Superfície** de um polígono é a reunião do polígono com o seu interior.
- **Área** de um polígono é a medida da superfície desse polígono.

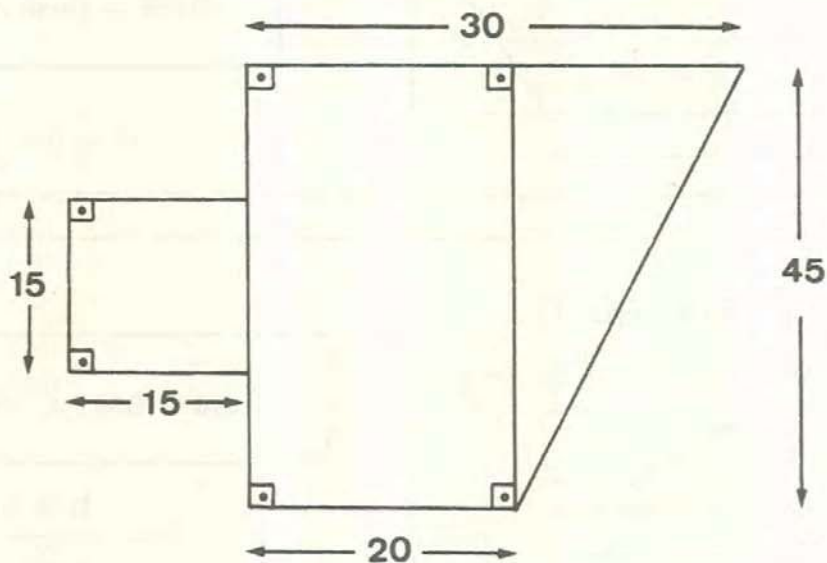
  Nota: Por comodidade, a área da superfície de um polígono será denominada **área de um polígono.**
- Dois polígonos se dizem **equivalentes** se têm a mesma área.

ÁREAS DOS PRINCIPAIS POLÍGONOS

Nota:

Nas fórmulas, para facilitar, usamos apenas a palavra:

- lado em vez de medida do lado.
- base em vez de medida da base, e assim por diante.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

Calcular a área da figura abaixo, supondo as medidas em centímetros.

Solução:

a) Área do quadrado: $A = 15 \cdot 15 \Rightarrow A = 225$

b) Área do retângulo: $A = 20 \cdot 45 \Rightarrow A = 900$

c) Área do triângulo: $A = \dfrac{45 \cdot 10}{2} \Rightarrow A = 225$

d) Área total: $A = 225 + 900 + 225 = 1350$

Resposta: 1350 cm^2.

EXERCÍCIOS

1) Calcule a área das figuras, supondo as medidas em cm :

Resp.: 49 cm^2.

a)

Resp.: 18 cm^2.

b)

Resp.: 12 cm^2.

c) f)

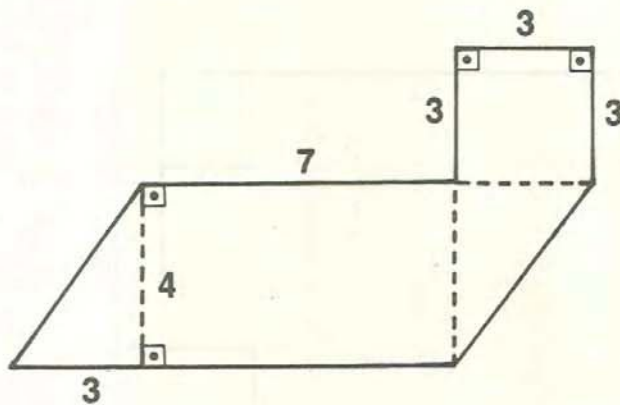
d)

Resp.: 7,5 cm^2

e)

Resp.: 20 cm^2.

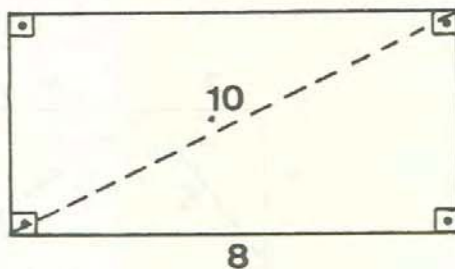
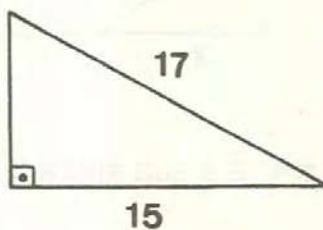
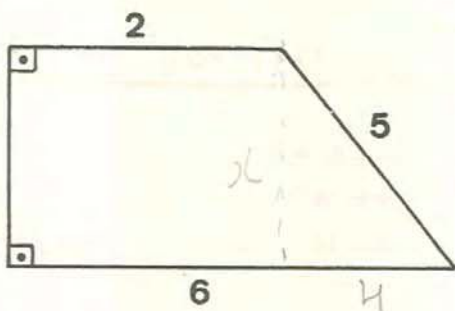
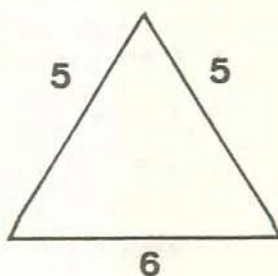
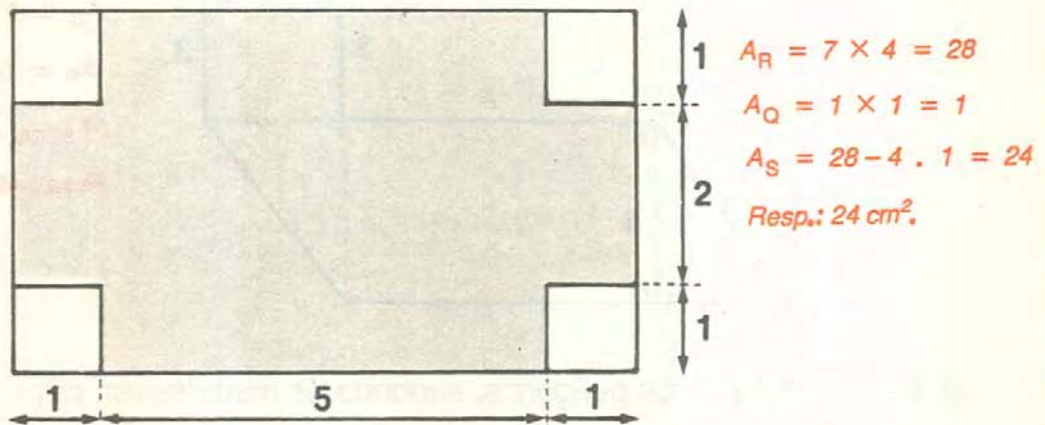
Resp.: 13,5 cm^2.

2) Calcule a área da figura, supondo as medidas em cm:

3) Calcule a área dos polígonos, supondo as medidas em cm:

a)

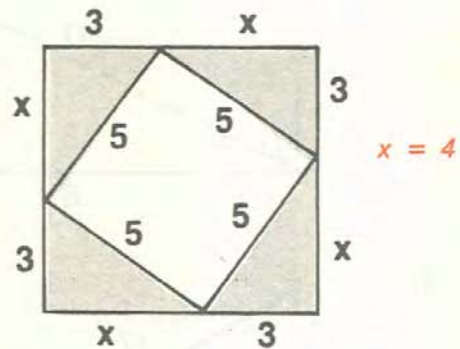
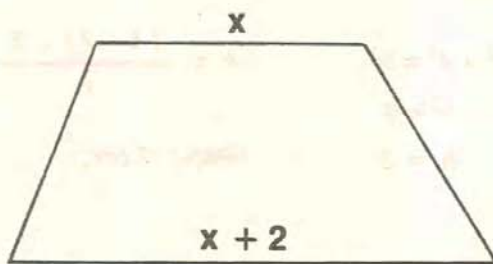
b)

c)

d)

4) Calcule a área da região sombreada, supondo as medidas em cm:

5) Na figura, calcule:

a) a área do quadrado menor. *25 cm²*

b) a área do quadrado maior. *49 cm²*

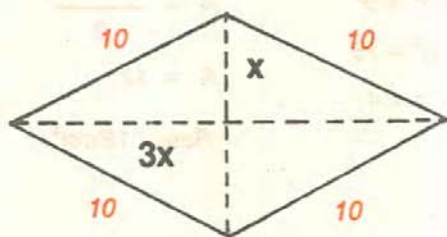
c) a área da região sombreada. *24 cm²*

6) A área do trapézio da figura abaixo mede 42 cm² e a sua altura 3 cm. Calcule o valor de x.

$$42 = \frac{[x + (x + 2)] \, . \, 3}{2}$$

$84 = 6x + 6$

$6x = 78$

$x = 13$

Resp.: 13 cm

7) O perímetro do losango da figura abaixo é 40 cm. Calcule a área desse losango.

$x^2 + (3x)^2 = 10^2$

$x^2 + 9x^2 = 100$

$10x^2 = 100$

$x^2 = 10$

$$A = \frac{6x \, . \, 2x}{2} = 6x^2$$

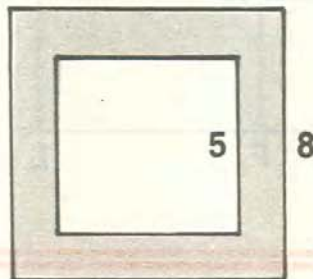
$A = 6x^2$

$A = 6 \, . \, 10$

$A = 60$

Resp.: 60 cm².

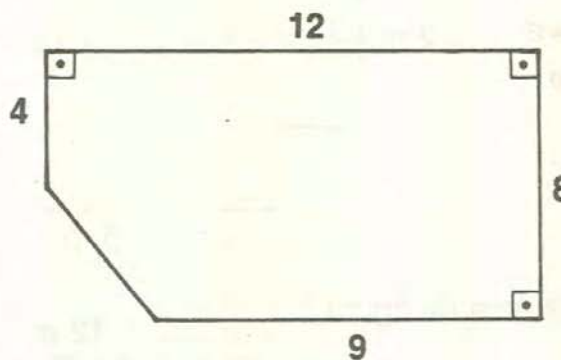
EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1) Calcule a área da figura sombreada, sabendo que o lado do quadrado maior mede 8 m e do quadrado menor 5 m.

$Q_M = 8 \times 8 = 64$

$Q_m = 5 \times 5 = 25$

$A_S = 64 - 25 = 39$

Resp.: 39 m².

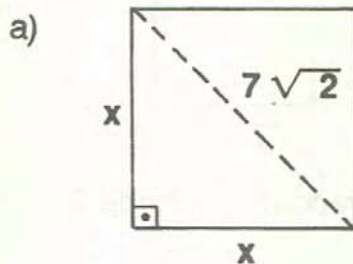
2) Calcule a área da figura, supondo as medidas em cm:

$A_{RETÂNGULO} = 4 \times 12 = 48$

$A_{TRAPÉZIO} \quad \frac{(12 + 9)\,4}{2} = 42$

$A_{TOTAL} = 48 + 42 = 90$

Resp. 90 cm².

3) Calcule a área dos polígonos, supondo as medidas em cm:

a)

$x^2 + x^2 = (7\sqrt{2})^2$

$2x^2 = 98$

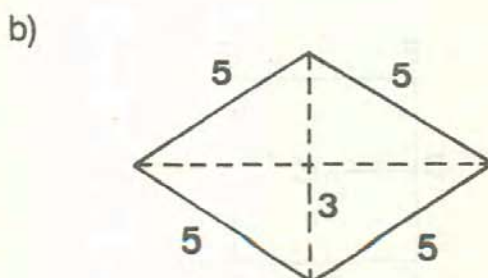
$x^2 = 49$

$x = 7$

$A = 7 \cdot 7$

$A = 49$

Resp.: 49 cm².

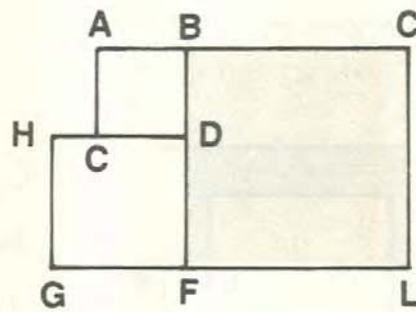
b)

$d^2 + 3^2 = 5^2$

$d^2 = 16$

$d = 4$

$A = \frac{8 \cdot 6}{2} = 24$

Resp.: 24 cm².

4) Na figura, a área do quadrado ABCD mede 25 m² e a área do quadrado HDFG mede 169 m². Qual a área do quadrado BFLC ?

BD = 5m

DF = 13m

Então: BF = 18m

A = 18 × 18 = 324

Resp.: 324 m².

TESTES

1) (CESGRANRIO - RJ) A área da sala representada na figura é:

a) 15 m²

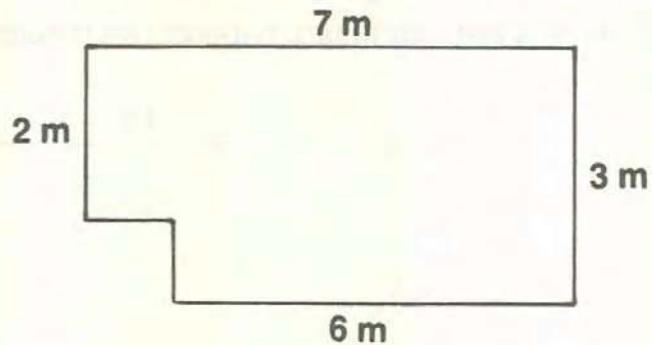
b) 17 m²

c) 19 m²

■ d) 20 m²

$A_1 = 6 . 3 = 18$

$A_2 = 2 . 1 = 2$

$A_1 + A_2 = 20$

2) (UF - PR) Qual o valor da área da figura?

a) 95 m²

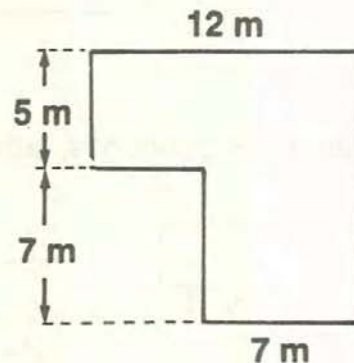
■ b) 109 m²

c) 119 m²

d) 144 m²

$A_1 = 5 . 12 = 60$

$A_2 = 7 . 7 = 49$

$A_1 + A_2 = 109$

3) Na figura abaixo, há dois quadrados. A área do quadrado maior mede 25 m² e $\overline{BG}$ = 2 m. A área da região sombreada é:

a) 9 m²

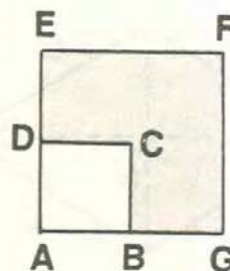
■ b) 16 m²

c) 18 m²

d) 21 m²

$\ell^2 = 25 \Rightarrow \ell = 5$

$AB = 5 - 2 = 3$

$A = 25 - 9 = 16$

4) Na figura abaixo, a área do quadrado BCDI é 36 m^2 e a área do quadrado ACEG é 64 m^2. A área do quadrado HGFI é:

a) 2 m^2

■ b) 4 m^2

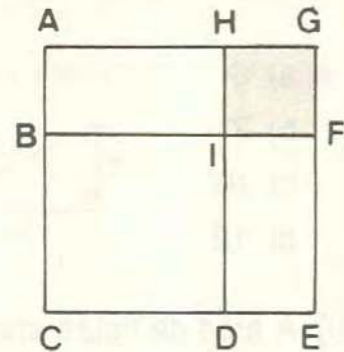
c) 9 m^2

d) 16 m^2

$\ell_1^2 = 64 \Rightarrow \ell_1 = 8$

$\ell_2^2 = 36 \Rightarrow \ell_2 = 6$

$\ell = 8 - 6 = 2$

Logo: $A = \ell^2 \Rightarrow A = 4$

5) A área do retângulo da figura é 18. Então, o valor de x é:

a) 1

b) 2

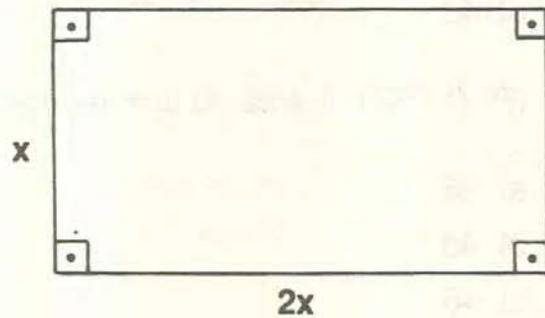
■ c) 3

d) 4

$2x \cdot x = 18$

$2x^2 = 18$

$x^2 = 9$

$x = 3$

6) A área do triângulo da figura é 24. Então, o valor de x é:

■ a) 6

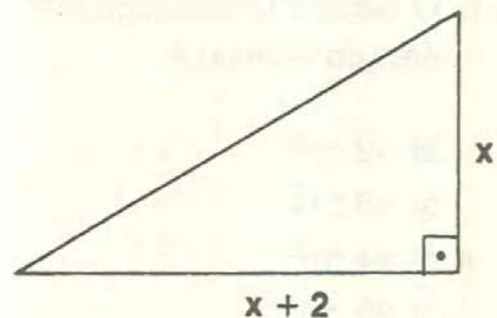
b) 7

c) 8

d) 9

$24 = \frac{x(x+2)}{2}$

$x^2 + 2x - 48 = 0$

$\begin{cases} x' = 6 \\ x'' = -8 \text{ (não convêm)} \end{cases}$

7) Na figura abaixo, a área do retângulo sombreado é:

a) 60

b) 80

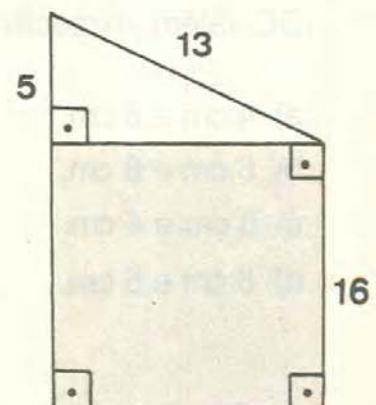
c) 104

■ d) 192

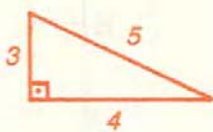
$\ell^2 + 5^2 = 13^2$

$\ell^2 = 144$

$\ell = 12$

Então: $A = 12 \times 16 = 192$

8) (UDF) O perímetro de um triângulo retângulo mede 12 metros e seus lados medem x, x + 1 e x + 2. Determinar a área desse triângulo.

■ a) 6
b) 7
c) 10
d) 12

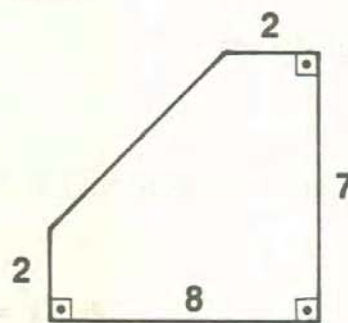
$x + x + 1 + x + 2 = 12 \Rightarrow x = 3$

$$A = \frac{3 \times 4}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

9) A área da figura abaixo é:

a) 37
b) 39
■ c) 41
d) 43

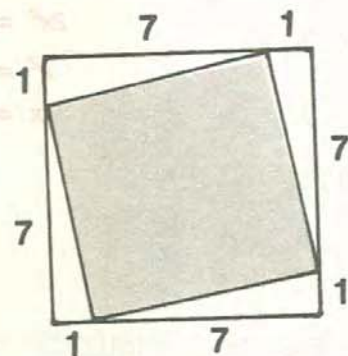
$A_{RETÂNGULO} = 2 \times 7 = 14$

$$A_{TRAPÉZIO} = \frac{(7+2) \cdot 6}{2} = 27$$

$A_{TOTAL} = 14 + 27 = 41$

10) (PUC - SP) A área do quadrado sombreado é:

a) 36
b) 40
c) 48
■ d) 50

$\ell^2 = 7^2 + 1^2$ $\quad A = \ell^2$

$\ell^2 = 50$ $\quad A = 50$

11) O lado de um losango mede 5 cm e uma das diagonais mede 6 cm. Então, a área do losango é:

a) 12 cm²
b) 18 cm²
■ c) 24 cm²
d) 30 cm²

$x^2 + 3^2 = 5^2$

$x^2 = 16$

$x = 4$

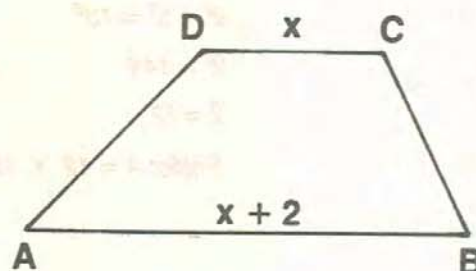
$$A = \frac{8 \cdot 6}{2} = 24$$

12) (PUC - SP) No trapézio, a área mede 21 cm² e a altura 3 cm. Então AB e DC valem, respectivamente:

a) 4 cm e 6 cm.
b) 6 cm e 8 cm.
c) 6 cm e 4 cm.
■ d) 8 cm e 6 cm.

$$21 = \frac{[x + (x+2)] \cdot 3}{2}$$

$x = 6$

Então: $x + 2 = 8$

13) (UF - GO) Para cobrir o piso de um banheiro de 1,00 m de largura por 2,00 m de comprimento com cerâmicas quadradas, medindo 20 cm de lado, o número necessário de cerâmicas é:

a) 30
■ b) 50
c) 75
d) 500

$\text{Área} = 100 \times 200 = 20000\ cm^2$

$\text{Cerâmica} = 20 \times 20 = 400\ cm^2$

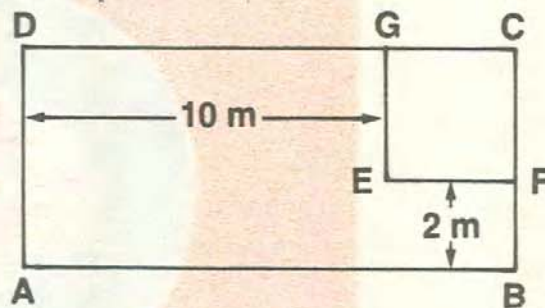
$\text{Quantidade} = 20000 : 400 = 50$

14) (CESCEM - SP) Na figura abaixo está representado o retângulo ABCD com 105 m^2. Usando as medidas indicadas (DG = 10 m e BF = 2 m), verificamos que o lado do quadrado EFCG mede:

a) 3 m
■ b) 5 m
c) 8 m
d) $\sqrt{85}$ m

$(10 + x)(2 + x) = 105$

$x^2 + 12x - 85 = 0$

$\begin{cases} x' = 5 \\ x'' = -17 \text{ (não convém)} \end{cases}$

15) Se aumentarmos de 1 m o lado de um quadrado, sua área fica aumentada de 15 m^2. A área desse quadrado mede:

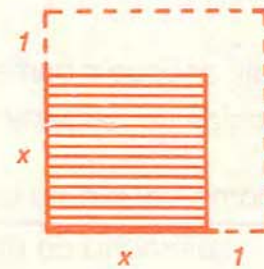
a) 16 m^2
b) 25 m^2
c) 36 m^2
■ d) 49 m^2

$A_{final} = A_{inicial} + \text{aumento}$

$(x + 1)^2 = x^2 + 15$

$2x = 14$

$x = 7$

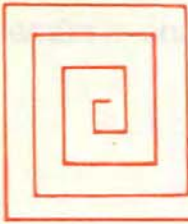
Então: $A = 49\ m^2$

16) (CESGRANRIO - RJ) Numa cozinha de 3 m de comprimento, 2 m de largura e de 2,80 m de altura, as portas e janelas ocupam uma área de 4 m^2. Para azulejar as quatro paredes, o pedreiro aconselha a compra de 10% a mais da metragem a ladrilhar. A metragem de ladrilhos a comprar é:

a) 24,80 m^2
b) 25,50 m^2
■ c) 26,40 m^2
d) 26,80 m^2

$A_T = (2 + 2 + 3 + 3) \cdot 2{,}80 = 28\ m^2$

$A = 28\ m^2 - 4\ m^2 = 24\ m^2$

$C = 24\ m^2 + 2{,}40\ m^2 = 26{,}40\ m^2$

22 MEDIDA DA CIRCUNFERÊNCIA E ÁREA DO CÍRCULO

COMPRIMENTO DA CIRCUNFERÊNCIA

Coloque um disco sobre uma mesa e com um barbante dê a volta completa no mesmo.

A seguir, estique o barbante e meça o seu comprimento. Calculando a razão entre as medidas do barbante e do diâmetro do disco, vamos ter aproximadamente:

$$\frac{\text{comprimento do barbante}}{\text{diâmetro do disco}} = 3{,}14$$

Este número é representado pela letra grega π (lê-se **pi**).

Então:

$$\frac{C}{2r} = \pi \quad \text{ou} \quad \boxed{C = 2\pi r}$$

Logo:

O comprimento da circunferência é igual a 2π vezes o raio da mesma.

Nota:

A razão acima não é exata, pois o número π que a representa é um número irracional.

$$\pi = 3{,}14159\ldots$$

Na prática usamos o π com o valor 3,14.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

Calcule o comprimento de uma circunferência cujo raio mede 3 cm.

Solução:

$$\boxed{C = 2\pi r}$$

$$C = 2 \,.\, 3{,}14 \,.\, 3$$

$$C = 18{,}84$$ Resposta: 18,84 cm.

EXERCÍCIOS

1) Calcule o comprimento de uma circunferência quando:

a) o raio mede 2 cm *Resp.: 12,56 cm.*

b) o raio mede 2,5 cm *Resp.: 15,70 cm.*

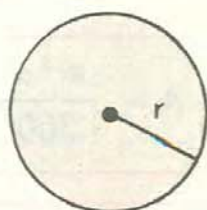
c) o diâmetro mede 8 cm *Resp.: 25,12 cm.*

2) Uma circunferência tem 31,40 cm de comprimento. Quanto mede seu raio?
$31{,}40 = 2 \,.\, 3{,}14 \,.\, r \Rightarrow r = 5$ Resp.: 5 cm.

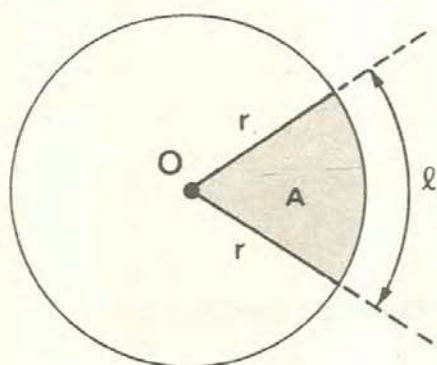
3) Uma circunferência tem 18,84 cm de comprimento. Quanto mede seu diâmetro?
$18{,}84 = 2 \,.\, 3{,}14 \,.\, r \Rightarrow r = 3$ Logo: $D = 6$ Resp.: 6 cm.

4) Quantas voltas dá uma roda de 30 cm de raio para percorrer 7536 m?
$C = 2 \,.\, 3{,}14 \,.\, 30 = 188{,}40$
Nº de voltas: $753600 : 188{,}40 = 4000$ Resp.: 4000 voltas.

ÁREA DO CÍRCULO E DE SUAS PARTES

CÍRCULO

$A = \pi r^2$ (r → raio)

SETOR CIRCULAR

a)

Indicamos:

r → raio

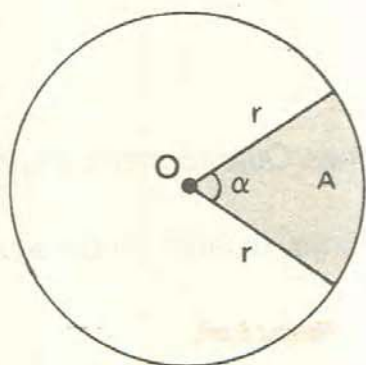
ℓ → comprimento do arco

A → área do setor

Formando a regra de três:

arco	**área**
$2\pi r$	πr^2
ℓ	A

$$\Longrightarrow \quad A = \frac{\ell \cdot r}{2}$$

b)

Indicamos:

r → raio

α → ângulo do setor

A → área do setor

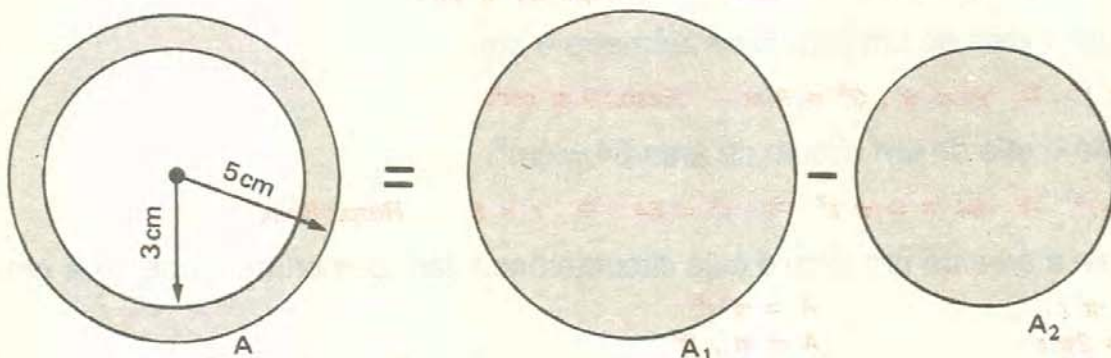
Formando a regra de três:

ângulo	**área**
$360°$	πr^2
$\alpha°$	A

$$\Longrightarrow \quad A = \frac{\pi r^2 \alpha°}{360°}$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1) Calcule a área de uma coroa circular de raios 3 cm e 5 cm.

Solução:

Calculando as áreas dos círculos A_1 e A_2:

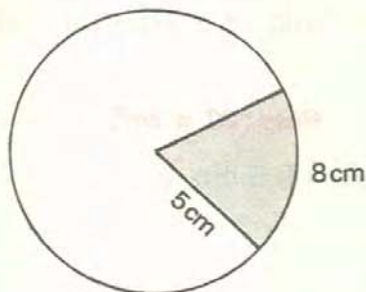
$A_1 = \pi \cdot 5^2 \Rightarrow A_1 = 25\pi$

$A_2 = \pi \cdot 3^2 \Rightarrow A_2 = 9\pi$

Então: $A = 25\pi - 9\pi$

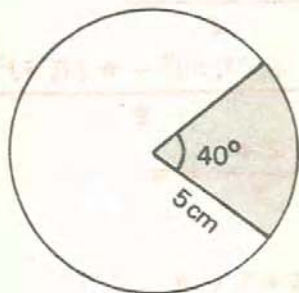
$A = 16\pi$

Resposta: 16π cm².

2) Calcule a área do setor:

Solução:

$$\boxed{A = \frac{\ell \cdot r}{2}} \Rightarrow A = \frac{8 \cdot 5}{2} = \frac{40}{2} = 20$$

Resposta: 20 cm².

3) Calcule a área do setor:

Solução:

$$\boxed{A = \frac{\pi r^2 \alpha°}{360°}} \Rightarrow A = \frac{\pi \cdot 5^2 \cdot 40°}{360°}$$

$$A = \frac{\pi \cdot 25 \cdot 40°}{360°}$$

$$A = \frac{25\pi}{9}$$

Resposta: $\frac{25\pi}{9}$ cm².

EXERCÍCIOS

1) Calcule a área de um círculo de raio 5 cm.

$A = \pi r^2 \Rightarrow A = \pi \,.\, 5^2 = 25\pi$ Resp.: $25\pi\ cm^2$.

2) Calcule a área de um círculo de diâmetro 6 cm.

$A = \pi r^2 \Rightarrow A = \pi \,.\, 3^2 = 9\pi$ Resp.: $9\pi\ cm^2$.

3) Calcule o raio de um círculo de área $64\pi\ cm^2$.

$A = \pi r^2 \Rightarrow 64\pi = \pi r^2 \Rightarrow r^2 = 64 \Rightarrow r = 8$ Resp.: 8 cm.

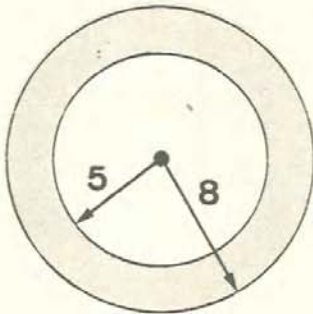
4) Calcule a área de um círculo cuja circunferência tem comprimento de 18π cm.

$C = 2\pi r$
$18\pi = 2\pi r$
$r = 9$

$A = \pi r^2$
$A = \pi \,.\, 9^2$
$A = 81\pi$

Resp.: $81\pi\ cm^2$.

5) Calcule a área de uma coroa circular de raios 8 cm e 5 cm.

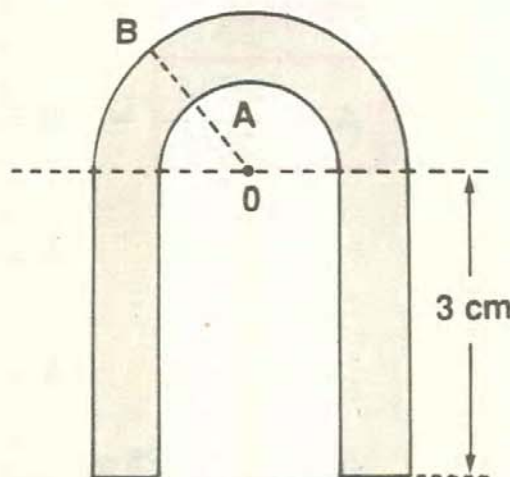
5 8

$\begin{cases} A_1 = 64\pi \\ A_2 = 25\pi \end{cases}$

$A = 64\pi - 25\pi$

$A = 39\pi$ Resp.: $39\pi\ cm^2$.

6) Dois círculos concêntricos têm 6 cm e 4 cm de raio. Calcule a área da coroa circular.

$\left.\begin{matrix} A_1 = 36\pi \\ A_2 = 16\pi \end{matrix}\right\}$ $A = 36\pi - 16\pi = 20\pi$ Resp.: $20\pi\ cm^2$.

7) Calcule a área da figura sombreada, sabendo que OA = 0,5 cm e OB = 1,5 cm.

$A_C = \dfrac{\pi R^2 - \pi r}{2}$

$A_C = \dfrac{\pi (1,5)^2 - \pi (0,5)^2}{2}$

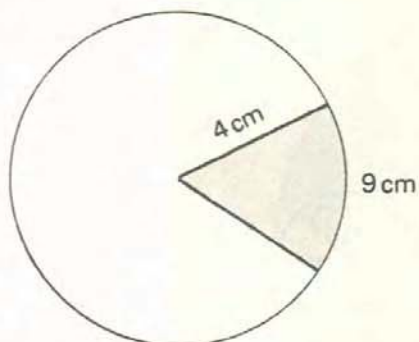
$A_C = \dfrac{2\pi}{2} = \pi$

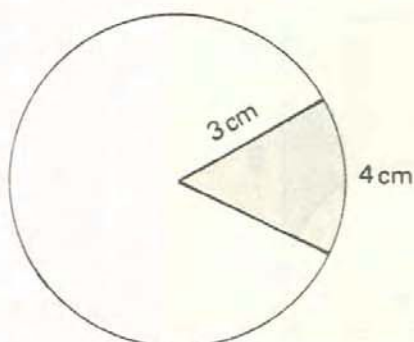
$A_T = 3 + 3 + \pi$

$A_T = 6 + \pi$

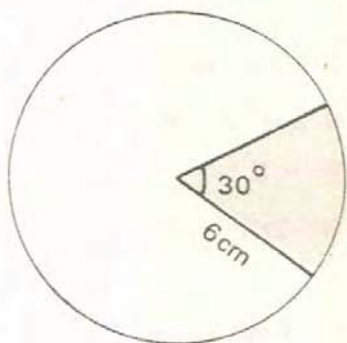
Resp.: $(6 + \pi)\ cm^2$.

8) Calcule a área do setor circular.

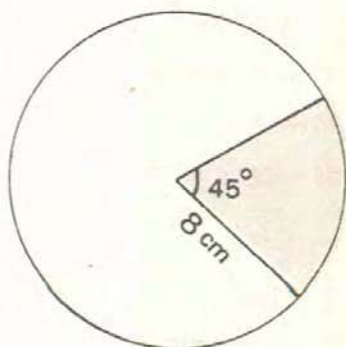
a)

$A = \dfrac{\ell \cdot r}{2} = \dfrac{9 \cdot 4}{2} = 18$ *Resp.: 18 cm².*

b)

$A = \dfrac{\ell \cdot r}{2} = \dfrac{4 \cdot 3}{2} = 6$ *Resp.: 6 cm².*

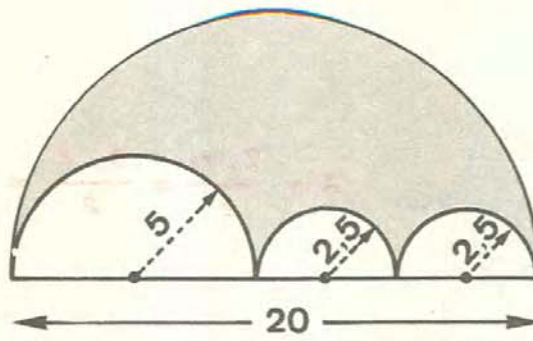
9) Calcule a área do setor circular.

a)

$A = \dfrac{\pi\, r^2\, \alpha°}{360°} = \dfrac{\pi \cdot 6^2 \cdot 30°}{360°} = 3\pi$

Resp.: 3 π cm².

b)

$A = \dfrac{\pi\, r^2\, \alpha°}{360°} = \dfrac{\pi \cdot 8^2 \cdot 45°}{360°} = 8\pi$

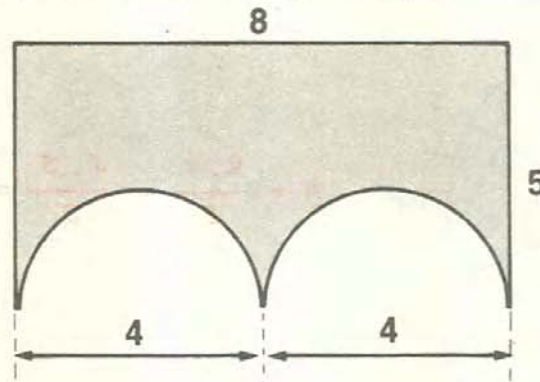
Resp.: 8 π cm².

10) Calcule a área da parte escura da figura, supondo as medidas em cm.

$$A_1 = \frac{\pi \cdot 10^2}{2} = 157$$

$$A_2 = \frac{\pi \cdot 5^2}{2} = 39,25$$

$$A_3 = \frac{\pi \cdot (2,5)^2}{2} = 9,8125$$

$A = A_1 - A_2 - 2 \cdot A_3 = 157 - 39,25 - 19,625 = 98,125$ Resp.: 98,125 cm².

11) Calcule a área da parte escura da figura, supondo as medidas em m.

$A_R = 8 \cdot 5 = 40$

$A_C = \pi \cdot 2^2 = 12,56$

$A_R - A_C = 27,44$

Resp.: 27,44 m².

12) Calcule a área das partes escuras das figuras, supondo as medidas em centímetros.

a)

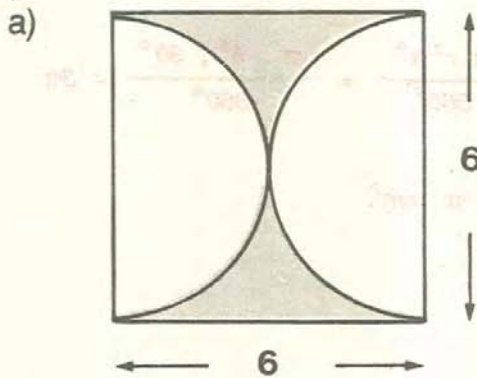
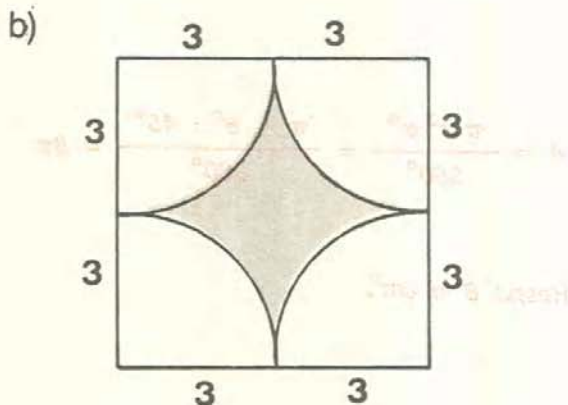
$A_Q = 6 \cdot 6 = 36$

$A_C = \pi \cdot 3^2 = 9\pi$

$A_E = 36 - 9\pi$

$A_E = 36 - 28,26 = 7,74$

Resp.: 7,74 cm².

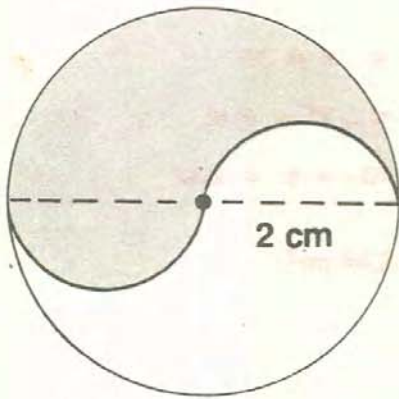
b)

$A_Q = 6 \cdot 6 = 36$

$A_C = \pi \cdot 3^2 = 9\pi$

$A_E = 36 - 9\pi$

$A_E = 36 - 28,26 = 7,74$

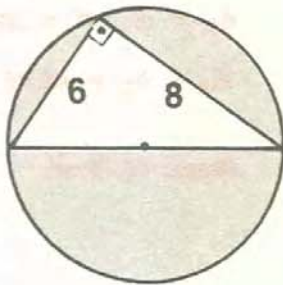
Resp.: 7,74 cm².

13) Calcule a área da parte escura da figura.

$A = \frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi \cdot 2^2}{2} = 2\pi$ *Resp.: 2 π cm².*

14) Calcule a área da parte escura da figura, supondo as medidas em centímetros.

$d^2 = 6^2 + 8^2$

$d^2 = 100$

$d = 10$

$A_C = \pi \cdot 5^2$

$A_C = 25\pi$

$A_C = 78{,}5$

$A_T = \frac{6 \cdot 8}{2}$

$A_T = 24$

$A_E = 78{,}5 - 24 = 54{,}5$ *Resp.: 54,5 cm².*

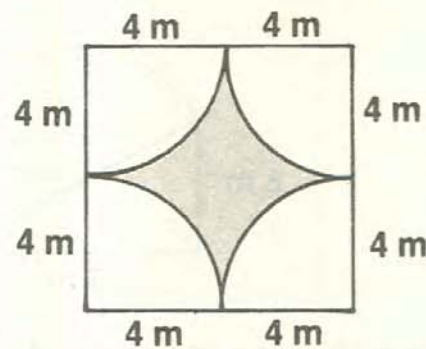
EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1) Qual o perímetro da figura sombreada no interior do quadrado?

$C = 2\pi r$

$C = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 4$

$C = 25{,}12$

Resp.: 25,12 m.

2) Qual o perímetro da figura?

$C_1 = \pi r$

$C_1 = 3{,}14 \cdot 10$

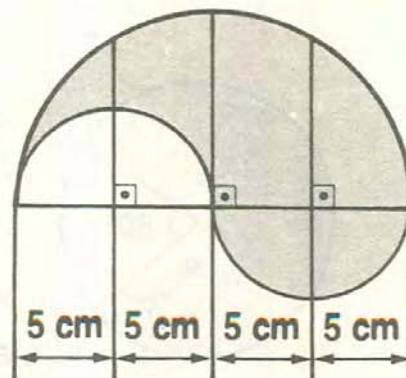
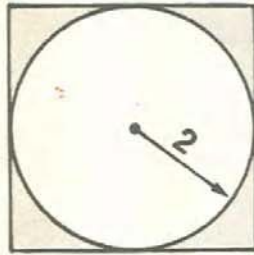
$C_1 = 31{,}40$

$C_2 = \pi r$

$C_2 = 3{,}14 \cdot 5$

$C_2 = 15{,}7$

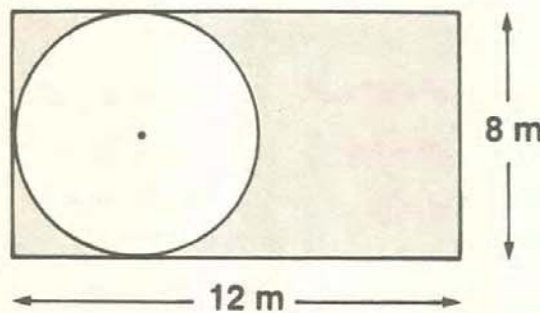
$P = 31{,}4 + 15{,}7 + 15{,}7 = 62{,}8$

Resp.: 62,8 cm.

3) Calcule a área da parte escura da figura, supondo a medida em centímetro.

$A_Q = 4 \cdot 4 = 16$

$A_C = \pi \cdot 2^2 = 4\pi$

$A_E = 16 - 4\pi = 3{,}44$

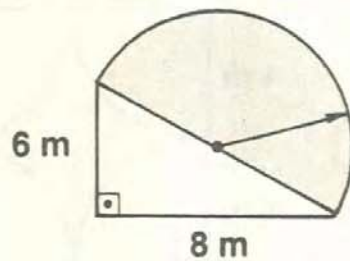
Resp.: 3,44 cm².

4) Calcule a área da parte escura da figura.

$A_R = 96$

$A_C = \pi \cdot 4^2 = 50{,}24$

$A_R - A_C = 45{,}76$

Resp.: 45,76 m².

5) Qual a área da parte escura da figura?

$h^2 = 6^2 + 8^2$

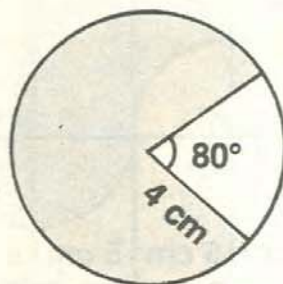
$h^2 = 100$

$h = 10$

$$A_{SC} = \frac{\pi \cdot 5^2}{2}$$

$A_{SC} = 39{,}25$

Resp.: 39,25 m².

6) Calcule a área da parte escura da figura.

$A_C = 3{,}14 \cdot 4^2 = 50{,}24$

$$A_S = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot \alpha°}{360°} = \frac{3{,}14 \cdot 16 \cdot 80°}{360°} \cong 11{,}16$$

$A_C - A_S = 50{,}24 - 11{,}16 = 39{,}08$

Resp.: 39,08 cm².

TESTES

1) Uma pessoa dá 5 voltas ao redor de uma praça circular que tem um diâmetro de 24 m. Essa pessoa percorrerá aproximadamente:

a) 124,2 m
b) 188,4 m
■ c) 376,8 m
d) 753,6 m

$C = 2 \cdot \pi \cdot 12 = 75{,}36$
$P = 75{,}36 \cdot 5 = 376{,}8$

2) (CESGRANRIO - RJ) Um ciclista de uma prova de resistência deve percorrer 500 km sobre uma pista circular de raio 200 m. O número aproximado de voltas que ele deve dar é:

a) 200
b) 300
■ c) 400
d) 500

$C = 2 \cdot \pi \cdot 200 = 1256$
$N = 500000 : 1256 \cong 398$

3) O perímetro da figura ao lado é:

a) $2\pi a$
■ b) $3\pi a$
c) $6\pi a$
d) $8\pi a$

$C_{SC} = \pi r$
$C_{SC} = \pi a$
$P_T = 3(\pi a) = 3\pi a$

4) Um círculo possui raio π. Sua área é:

a) π
b) π^2
■ c) π^3
d) π^4

$A = \pi r^2$
$A = \pi \cdot \pi^2 = \pi^3$

5) Uma pedra de mármore tem 8 m de diâmetro. Então, o número de metros quadrados dessa pedra é aproximadamente:

■ a) 50
b) 100
c) 150
d) 200

$A = 3{,}14 \cdot 4^2$
$A = 50{,}24$

6) A área da região sombreada na figura abaixo é aproximadamente:

a) 228,25
b) 278,25
■ c) 339,25
d) 378,25

$A_R = 10 \cdot 30 = 300$
$A_{SC} = \dfrac{\pi \cdot 5^2}{2} = 39{,}25$
$A_T = 300 + 39{,}25 = 339{,}25$

7) A área de uma coroa circular de raios 1 cm e 3 cm é:

a) 7π cm²
■ b) 8π cm²
c) 9π cm²
d) 10π cm²

$A_1 = \pi \cdot 3^2 = 9\pi$
$A_2 = \pi \cdot 1^2 = \pi$
$A_F = 9\pi - \pi = 8\pi$

8) (UF - PA) A área de um círculo é 5π cm². Sua circunferência mede:

a) 10π cm
b) 5π cm
c) $\sqrt{5}\pi$ cm
■ d) $2\sqrt{5}\pi$ cm

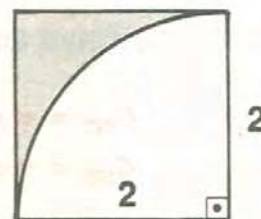
$A = \pi r^2$
$5\pi = \pi r^2$
$r = \sqrt{5}$

$C = 2\pi r$
$C = 2\pi\sqrt{5}$
$C = 2\sqrt{5}\pi$

9) (UF - SC) A área da figura sombreada é:

a) π
■ b) $4 - \pi$
c) $4(1 - \pi)$
d) $2(2 - \pi)$

$A_{SC} = \dfrac{\pi \cdot 2^2}{4} = \pi$

$A = 4 - \pi$

10) Um terreno retangular de 15 por 20 metros está gramado, com exceção de um canteiro circular de 4 m de raio. A área gramada é aproximadamente:

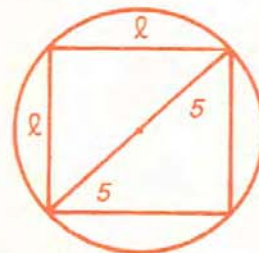
a) 150 m²
b) 180 m²
c) 200 m²
■ d) 250 m²

$A_R = 15 \cdot 20 = 300$
$A_C = \pi \cdot 4^2 = 3{,}14 \cdot 16 = 50{,}24$
$A_g = 300 - 50{,}24 = 249{,}76$

11) A área de um quadrado inscrito num círculo de 5 cm de raio é:

a) 25 cm²
■ b) 50 cm²
c) 75 cm²
d) 100 cm²

$\ell^2 + \ell^2 = 10^2$
$2\ell^2 = 100$
$\ell^2 = 50$

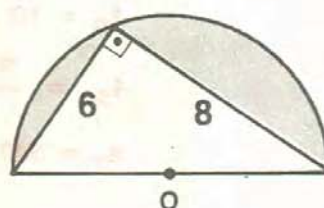
$A = \ell^2$
$A = 50$

12) A área da região sombreada na figura abaixo é aproximadamente:

a) 14,75
■ b) 15,25
c) 15,75
d) 16,25

$d^2 = 6^2 + 8^2 \Rightarrow d = 10$

$A_{SC} = \dfrac{\pi \cdot 5^2}{2} = 39{,}25$

$A_T = \dfrac{6 \cdot 8}{2} = 24$

Logo: $A = 39{,}25 - 24 = 15{,}25$

8ª série

SUPLEMENTO
PARA O
PROFESSOR

SUGESTÃO DE
PLANEJAMENTO DE CURSO

OBJETIVOS GERAIS DO ENSINO DA MATEMÁTICA

O curso de 1º grau deverá proporcionar condições para que o aluno:

- Conheça e utilize corretamente a linguagem matemática.
- Desenvolva a capacidade de: analisar, relacionar, comparar, abstrair, generalizar.
- Desenvolva hábitos de estudo, de rigor e precisão e de concisão.
- Desenvolva habilidades específicas de medir e comparar grandezas, calcular, construir e consultar tabelas e gráficos.
- Adquira conhecimentos básicos, a fim de possibilitar sua integração na sociedade em que vive.

Este suplemento não integra o livro do aluno.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS	CONTEÚDO	ESTRATÉGIA	AVALIAÇÃO
• Calcular potências de números reais com expoente inteiro. • Aplicar as propriedades de potências. • Resolver expressões com potências.	❶ Potenciação.	• Utilizar a aula expositiva para introduzir o assunto. • Propor a resolução dos exercícios.	• Provas • Correção dos exercícios complementares
• Reconhecer a potenciação e a radiciação como operações inversas. • Identificar os termos da radiciação. • Calcular a raiz de um número racional. • Aplicar as propriedades dos radicais na resolução de exercícios. • Simplificar radicais.	❷ Radicais.	• Corrigir estes exercícios para eliminar as dúvidas. • Propor a resolução dos exercícios complementares como trabalho extraclasse.	
• Identificar radicais semelhantes. • Determinar somas e diferenças de radicais. • Determinar produtos e quocientes de radicais. • Calcular potências de radicais. • Determinar raízes de radicais. • Simplificar expressões com radicais.	❸ Operações com radicais.	• Propor a resolução dos testes, corrigindo e comentando cada questão.	

OBJETIVOS ESPECÍFICOS	CONTEÚDO	ESTRATÉGIA	AVALIAÇÃO
• Identificar o fator racionalizante de uma expressão com radical. • Racionalizar o denominador de uma fração.	4 Racionalização de denominadores.	• Utilizar a aula expositiva para introduzir o assunto. • Propor a resolução dos exercícios. • Corrigir estes exercícios para eliminar as dúvidas. • Propor a resolução dos exercícios complementares como trabalho extraclasse. • Propor a resolução dos testes, corrigindo e comentando cada questão.	• Provas. • Correção dos exercícios complementares.
• Identificar equações do 2º grau. • Identificar os coeficientes de uma equação do 2º grau. • Escrever uma equação do 2º grau na forma reduzida. • Resolver equações incompletas do 2º grau. • Resolver equações completas do 2º grau utilizando a fórmula de Bháskara. • Resolver equações literais do 2º grau.	5 Equações do 2º grau.		
• Determinar o número e a natureza das raízes da equação do 2º grau. • Reconhecer as propriedades das raízes.	6 Equação do 2º grau – Discussão e propriedades das raízes.		
• Identificar equações biquadradas. • Resolver equações biquadradas em IR.	7 Equações biquadradas.		

OBJETIVOS ESPECÍFICOS	CONTEÚDO	ESTRATÉGIA	AVALIAÇÃO
• Identificar equações irracionais. • Resolver equações irracionais em IR. • Eliminar as raízes estranhas de uma equação irracional.	8 Equações irracionais.	• Utilizar a aula expositiva para introduzir o assunto. • Propor a resolução dos exercícios. • Corrigir estes exercícios para eliminar as dúvidas. • Propor a resolução dos exercícios complementares como trabalho extraclasse. • Propor a resolução dos testes, corrigindo e comentando cada questão.	• Provas. • Correção dos exercícios complementares.
• Interpretar e escrever o enunciado do problema em linguagem matemática. • Resolver problemas por meio de equações do 2º grau.	9 Problemas do 2º grau.		
• Reconhecer pares ordenados. • Identificar quando dois pares ordenados são iguais ou diferentes. • Identificar e representar ponto no plano cartesiano. • Determinar o produto cartesiano de dois conjuntos. • Determinar o número de elementos de produtos cartesianos.	10 Produto cartesiano.		
• Identificar uma relação de um conjunto A em um conjunto B. • Identificar uma função de um conjunto A em um conjunto B. • Reconhecer o domínio, o contradomínio e o conjunto imagem de uma função.	11 Relações e funções.		

OBJETIVOS ESPECÍFICOS	CONTEÚDO	ESTRATÉGIA	AVALIAÇÃO
• Identificar funções do 1º grau. • Representar, graficamente, as funções do 1º grau. • Reconhecer o zero de uma função do 1º grau.	⓬ Função do 1º grau.	• Utilizar a aula expositiva para introduzir o assunto. • Propor a resolução dos exercícios. • Corrigir estes exercícios para eliminar as dúvidas. • Propor a resolução dos exercícios complementares como trabalho extraclasse. • Propor a resolução dos testes, corrigindo e comentando cada questão.	• Provas. • Correção dos exercícios complementares.
• Identificar funções quadráticas. • Representar, graficamente, as funções do 2º grau. • Determinar os zeros de uma função quadrática.	⓭ Função quadrática ou função do 2º grau.		
• Determinar a razão entre dois segmentos. • Resolver exercícios aplicando a noção de segmentos proporcionais. • Resolver exercícios aplicando o teorema de Tales.	⓮ Grandezas proporcionais.		
• Reconhecer quando duas figuras são semelhantes. • Reconhecer dois triângulos semelhantes. • Determinar medidas desconhecidas em triângulos semelhantes.	⓯ Semelhança.		
• Identificar os elementos de um triângulo retângulo. • Resolver exercícios, aplicando as relações métricas no triângulo retângulo. • Resolver exercícios, aplicando o teorema de Pitágoras.	⓰ Relações métricas no triângulo retângulo.		

OBJETIVOS ESPECÍFICOS	CONTEÚDO	ESTRATÉGIA	AVALIAÇÃO
• Determinar o seno, o cosseno e a tangente dos ângulos agudos de um triângulo retângulo. • Resolver problemas envolvendo triângulos retângulos.	17 Razões trigonométricas	• Utilizar a aula expositiva para introduzir o assunto. • Propor a resolução dos exercícios. • Corrigir estes exercícios para eliminar as dúvidas. • Propor a resolução dos exercícios complementares como trabalho extraclasse. • Propor a resolução dos testes, corrigindo e comentando cada questão.	• Provas. • Correção dos exercícios complementares.
• Reconhecer as relações métricas num triângulo qualquer. • Aplicar as relações métricas em triângulos acutângulos e obtusângulos. • Identificar a natureza de um triângulo, dadas as medidas dos seus lados.	18 Relações métricas num triângulo qualquer.		
• Identificar as relações métricas numa circunferência. • Resolver exercícios, aplicando as relações estudadas.	19 Relações métricas na circunferência.		
• Identificar os elementos de um polígono regular. • Calcular a medida do lado e do apótema dos principais polígonos regulares inscritos.	20 Polígonos regulares.		
• Calcular, por meio de fórmulas, a área de uma região determinada por um retângulo, quadrado, paralelogramo, triângulo, losango, trapézio.	21 Área das figuras planas.		
• Determinar a medida do comprimento de uma circunferência. • Calcular, por meio de fórmulas, a área de uma região determinada por um círculo e um setor circular.	22 Medida da circunferência e área do círculo.		

SIGNIFICADO DAS SIGLAS

ACAFE-SC – Associação Catarinense de Fundações Educacionais ao Ensino Superior (Santa Catarina)
CEUB – Centro de Ensino Unificado de Brasília
CESCEA-SP – Centro de Seleção de Candidatos das Escolas de Economia e Administração (São Paulo)
CESCEM-SP – Centro de Seleção de Candidatos das Escolas de Medicina (São Paulo)
CESESP-PE – Centro de Estudos Superiores do Estado de Pernambuco
CESGRANRIO-RJ – Centro de Seleção de Candidatos ao Ensino Superior do Grande Rio (Rio de Janeiro)
C. NAVAL-RJ – Colégio Naval – Angra dos Reis (Rio de Janeiro)
EE MAUÁ-SP – Escola de Engenharia Mauá (São Paulo)
E. NAVAL-RJ – Escola Naval do Rio de Janeiro.
EPCAR-MG – Escola Preparatória de Cadetes do Ar – Barbacena (Minas Gerais)
ESAN-SP – Escola Superior de Administração e Negócios (São Paulo)
ETI-SP – Escola Técnica Industrial – São Bernardo do Campo (São Paulo)
ESCOLA TÉCNICA-SP – Escola Técnica Federal de São Paulo
FAAP-SP – Fundação Armando Álvares Penteado (São Paulo)
F. ALFENAS-MG – Faculdade de Alfenas (Minas Gerais)
FCC-SP – Fundação Carlos Chagas (São Paulo)
FCL-SP – Faculdade de Jornalismo Cásper Líbero (São Paulo)
FCMSC-SP – Faculdade de Ciências Médicas da Santa Casa (São Paulo)
FEC-SP – Faculdade de Educação e Cultura do ABC (São Paulo)
FECM-SP – Faculdade de Economia Cândido Mendes (São Paulo)
FEI-SP – Faculdade de Engenharia Industrial (São Paulo)
FEP-PA – Faculdade de Engenharia do Pará
FGV-SP – Fundação Getúlio Vargas (São Paulo)
FIB-RJ – Faculdades Integradas Benett (Rio de Janeiro)
FIUBE-MG – Faculdades Integradas de Uberaba (Minas Gerais)
F. MAUÁ-SP – Faculdade de Engenharia Mauá (São Paulo)
FM-Barbacena–MG – Faculdade de Medicina de Barbacena (Minas Gerais)
FM–Itajubá-MG – Faculdade de Medicina de Itajubá (Minas Gerais)
FMJ-SP – Faculdade de Medicina de Jundiaí (São Paulo)
FMU-SP – Faculdades Metropolitanas Unidas (São Paulo)
F. OBJETIVO-SP – Faculdades Objetivo (São Paulo)
FSA-SP – Fundação Santo André (São Paulo)
FUVEST-SP – Fundação Universitária para o Vestibular (São Paulo)
GV-SP – Fundação Getúlio Vargas (São Paulo)
ILHÉUS-ITABUNA-BA – Federação das Escolas Superiores de Ilhéus e Itabúna (Bahia)
ITE-Bauru-SP – Instituição Toledo de Ensino – Bauru (São Paulo)
MACK-SP – Universidade Mackenzie (São Paulo)
MAPOFEI-SP – Mauá – Politécnica – Fei (São Paulo)
MED–ABC – Faculdade de Medicina do ABC (São Paulo)
MED-Pouso Alegre– Faculdade de Medicina de Pouso Alegre (Minas Gerais)
MED-Santos – Faculdade de Medicina de Santos (São Paulo)
OSEC-SP – Organização Santamarense de Educação e Cultura (São Paulo)
PUC-DF – Pontifícia Universidade Católica do Distrito Federal.
PUC-MG – Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais
PUC-SP – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
PUC-RS – Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul.
SANTA CASA-SP – Faculdade de Medicina da Santa Casa (São Paulo)
UB-DF – Universidade de Brasília (Distrito Federal)
UC-MG – Universidade Católica de Minas Gerais
UCS-BA – Universidade Católica de Salvador (Bahia)
UDF – Universidade do Distrito Federal
UE-CE – Universidade Estadual do Ceará
UE-MS – Universidade Estadual do Mato Grosso do Sul.
UE-MT – Universidade Estadual do Mato Grosso.
UEL-PR – Universidade Estadual de Londrina (Paraná)
UEPG-PR – Universidade Estadual de Ponta Grossa (Paraná)
UFB-DF – Universidade Federal de Brasília (Distrito Federal)
UF-AL – Universidade Federal de Alagoas
UF-BA – Universidade Federal da Bahia
UF-CE – Universidade Federal do Ceará
UF-ES – Universidade Federal do Espírito Santo
UF-GO – Universidade Federal de Goiás
UF-MA – Universidade Federal do Maranhão
UF-MG – Universidade Federal de Minas Gerais
UF-MT – Universidade Federal do Mato Grosso
UF-PA – Universidade Federal do Pará
UF-PR – Universidade Federal do Paraná
UF-RN – Universidade Federal do Rio Grande do Norte
UF-RJ – Universidade Federal do Rio de Janeiro
UF-RS – Universidade Federal do Rio Grande do Sul
UF-SE – Universidade Federal de Sergipe
UFSC-SP – Universidade Federal de São Carlos (São Paulo)
UFV-MG – Universidade Federal de Viçosa (Minas Gerais)
UFU-MG – Universidade Federal de Uberlândia (Minas Gerais)
UGF-RJ – Universidade Gama Filho (Rio de Janeiro)
UJF-MG – Universidade de Juiz de Fora (Minas Gerais)
UMC-SP – Universidade de Moji das Cruzes (São Paulo)
UNB-DF – Universidade de Brasília (Distrito Federal)
UNESP-SP – Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (São Paulo)
USP – Universidade de São Paulo
UU-MG – Universidade de Uberaba (Minas Gerais)

HINO NACIONAL

Letra: *Osório Duque Estrada*
Música: *Francisco Manoel da Silva*

Ouviram do Ipiranga às margens plácidas
De um povo heróico o brado retumbante,
E o sol da liberdade, em raios fúlgidos,
Brilhou no céu da Pátria nesse instante.

Se o penhor dessa igualdade
Conseguimos conquistar com braço forte,
Em teu seio, ó Liberdade,
Desafia o nosso peito a própria morte!

Ó Pátria amada,
Idolatrada,
Salve! Salve!

Brasil, um sonho intenso, um raio vívido
De amor e de esperança à terra desce,
Se em teu formoso céu, risonho e límpido,
A imagem do Cruzeiro resplandece.

Gigante pela própria natureza,
És belo, és forte, impávido colosso,
E o teu futuro espelha essa grandeza.

Terra adorada,
Entre outras mil,
És tu, Brasil,
Ó Pátria amada!

Dos filhos deste solo és mãe gentil,
Pátria amada,
Brasil!

Deitado eternamente em berço esplêndido,
Ao som do mar e à luz do céu profundo,
Fulguras, ó Brasil, florão da América,
Iluminado ao sol do Novo Mundo!

Do que a terra mais garrida
Teus risonhos, lindos campos têm mais flores
"Nossos bosques têm mais vida",
"Nossa vida" no teu seio "mais amores".

Ó Pátria amada,
Idolatrada,
Salve! Salve!

Brasil, de amor eterno seja símbolo
O lábaro que ostentas estrelado,
E diga o verde-louro desta flâmula
– Paz no futuro e glória no passado.

Mas, se ergues da justiça a clava forte,
Verás que um filho teu não foge à luta,
Nem teme, quem te adora, a própria morte.

Terra adorada,
Entre outras mil,
És tu, Brasil,
Ó Pátria amada!

Dos filhos deste solo és mãe gentil,
Pátria amada,
Brasil!